МНОГОКРАТНО ЗАМЫКАЕМЫЕ ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н.М. Дмитрук

Для линейной системы управления с возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{1}$$

рассматривается задача о минимизации гарантированного значения терминального критерия качества $\max_{w(\cdot)} c'x(T)$ при условии попадания траектории системы (1) в момент времени T с гарантией на терминальное множество

$$X_T = \{x \in \mathbb{R}^n : g_{\min} \leqslant Hx \leqslant g_{\max}\}.$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}\}$ – управление, $w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}^p : ||w||_\infty \leqslant w_{\max}\}$ – неизвестное возмущение,

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times r},\ M \in \mathbb{R}^{n\times p},\ H \in \mathbb{R}^{m\times n},\ g_{\min},\ g_{\max} \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n –$$

заданные матрицы и векторы.

Сделаем предположение о том, что система (1) будет замкнута [1] в моменты времени $t_j \in \{1, 2, \ldots, T-1\}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$. Предполагается (см. [2, 3]), что в каждый момент замыкания t_j можно будет: 1) измерить текущее состояние $x^*(t_j)$ системы; 2) в зависимости от измеренного $x^*(t_j)$ выбрать новое управление $u_j(t|\,t_j, x^*(t_j))$, $t \in \Delta_j = \{t_j, t_j+1, \ldots, t_{j+1}-1\}$. Здесь x^* зависит от конкретной реализации возмущения в процессе управления.

Обозначим $x(t_{j+1}|\,t_j, x_j, u_j, w_j)$ – состояние системы (1) в момент t_{j+1} при начальном состоянии $x(t_j) = x_j$, управлении $u_j(t|\,t_j, x_j)$ и возмущении $w_j(t)$, $t \in \Delta_j$; $X(t_{j+1}|\,t_j, x_j, u_j) = \{x(t_{j+1}|\,t_j, x_j, u_j, w_j) \colon w_j(t) \in W,\ t \in \Delta_j\}$.

Определим стратегию управления $\pi_N(0, x_0)$ с N моментами замыкания $t_1, \ldots$ $\ldots, t_N$ рекуррентно на основе стратегий $\pi_{N-j}(t_j, x_j)$, с $N-j$ моментами замыкания, $j = N-1, N-2, \ldots, 1$:

$$\begin{aligned}
&\pi_1(t_{N-1}, x_{N-1}) = \{u_{N-1}(\cdot|\,t_{N-1}, x_{N-1}); u_N(\cdot|\,t_N, x_N), x_N \in X(t_N|\,t_{N-1}, x_{N-1}, u_{N-1})\},\\
&\pi_{N-j}(t_j, x_j) = \{u_j(\cdot|\,t_j, x_j); \pi_{N-j-1}(t_{j+1}, x_{j+1}), x_{j+1} \in X(t_{j+1}|\,t_j, x_j, u_j)\},\\
&\pi_N(0, x_0) = \{u_0(\cdot|0, x_0); \pi_{N-1}(t_1, x_1), x_1 \in X(t_1|0, x_0, u_0)\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Допустимость стратегии (2) также определим рекуррентно. Для этого введем множества X_{N+1}, X_N : $X_{N+1} = X_T$, X_N – множество точек x_N, для которых на Δ_N существуют оптимальные гарантирующие программы $u_N^0(t|\,t_N, x_N)$, $t \in \Delta_N$, т.е. существует решение задачи

$$V_N(t_N, x_N) = \min_{u_N} \max_{w_N} c'x(T|\,t_N, x_N, u_N, w_N), \quad X(T|\,t_N, x_N, u_N) \subseteq X_{N+1}. \tag{3}$$

На Δ_N определим допустимую стратегию

$$\pi_1(t_{N-1}, x_{N-1}) = \big\{u_{N-1}(\cdot|\,t_{N-1}, x_{N-1});\ u_N^0(\cdot|\,t_N, x_N),\ x_N \in X(t_N|\,t_{N-1}, x_{N-1},\ u_{N-1}^0)\big\}$$

с одним моментом замыкания t_N, где $u_{N-1}(t|\,t_{N-1}, x_{N-1})$, $t \in \Delta_{N-1}$, таково, что $X(t_N|\,t_{N-1}, x_{N-1}, u_{N-1}) \subseteq X_N$, см. также результаты для стратегии с одним замыканием в [3]. Множество всех x_{N-1}, для которых существует допустимая стратегия $\pi_1(t_{N-1}, x_{N-1})$ обозначим X_{N-1}.

Продолжая, определим множества $X_{N-2}, \ldots, X_0$ и управления $u_{N-2}(\cdot|\, t_{N-2}, x_{N-2})$, $\ldots$, $u_0(\cdot|0, x_0)$ в допустимой стратегии (2) согласно следующим правилам:

$$X_j = \big\{x_j \in \mathbb{R}^n : \ \exists u_j(\cdot|\, t_j, x_j), \ X(t_{j+1}|\, t_j, x_j, u_j) \subseteq X_{j+1}\big\}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

т.е. множество X_j составим из всех точек x_j, для которых существует управление $u_j(t|\, t_j, x_j)$, $t \in \Delta_j$, переводящее систему (1) с гарантией на множество X_{j+1}.

Оптимальная стратегия $\pi^0_N(0, x_0)$ определяется управлениями $u^0_j(t|\, t_j, x_j)$, $t \in \Delta_j$, которые, следуя рассуждениям динамического программирования, находятся из аналога уравнения Беллмана

$$V_j(t_j, x_j) = \min_{u_j} \max_{w_j} V_{j+1}\big(x(t_{j+1}|\, t_j, x_j, u_j, w_j)\big), \quad j = N-1, \ldots, 0, \tag{4}$$

где $V_N(t_N, x_N)$ определяется согласно (3).

Цель доклада — управление системой (1) по принципу замкнутого контура. Поэтому на основе оптимальных стратегий (2) определим так называемую оптимальную многократно замыкаемую обратную связь [1] для системы (1). Для этого погрузим рассматриваемую задачу в семейство задач, в котором процесс управления стартует в момент времени τ из состояния $z \in \mathbb{R}^n$. Оптимальную стратегию задачи семейства для позиции (τ, z) при $\tau \in \Delta_j$ обозначим

$$\pi^0_{N-j}(\tau, z) = \big\{u_j(\cdot|\, \tau, z); \ \pi_{N-j-1}(t_{j+1}, x_{j+1}), \ x_{j+1} \in X(t_{j+1}|\, t_j, x_j, u_j)\big\}.$$

Здесь $u^0_j(\cdot|\, \tau, z) = \big(u^0_j(t|\, \tau, z)\,, \ t \in \{\tau, \tau+1, \ldots, t_{j+1}-1\}\big)$, является решением задачи

$$V_j(\tau, z) = \min_{u_j} \max_{w_j} V_{j+1}\big(x(t_{j+1}|\, \tau, z, u_j, w_j)\big). \tag{5}$$

Тогда оптимальная замыкаемая обратная связь имеет вид

$$u^0(\tau, z) = u^0_j(\tau|\, \tau, z), \quad \tau \in \Delta_j, \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

Для построения реализации оптимальной многократно замыкаемой обратной связи $u^*(\tau) = u^0\big(\tau, x^*(\tau)\big)$, $\tau = 0, 1, \ldots, T-1$, в реальном времени [1] вдоль реализующейся в каждом конкретном процессе управления траектории $x^*(\tau)$, $\tau = 0, 1, \ldots, T-1$, необходимо быстро строить оптимальные управления $u^0_j\big(\cdot|\, \tau, x^*(\tau)\big)$, т.е. решать задачи вида (5).

Решение задачи (5) основано на построении внешних аппроксимаций многогранников $X_j(\alpha) = \{x_j : V_j(t_j, x_j) \leqslant \alpha\}$, $j = 1, \ldots, N$, (см. также [3]). Для этого выберем (не зависящую от α и j) систему векторов $p_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in K$, $||p_k|| = 1$, и составим из них матрицу $P \in \mathbb{R}^{|K| \times n}$. Пусть $f_j(\alpha) = \big(f_{jk}(\alpha), k \in K\big)$:

$$f_{jk}(\alpha) = \max p'_k x_j, \quad x_j \in X_j(\alpha). \tag{6}$$

Основной результат работы заключается в обосновании аффинной зависимости решений задач (6) от α:

$$f_j(\alpha) = f_j(0) + \lambda_j \alpha,$$

где $\lambda_j = (\lambda_{jk}, k \in K)$ находится из решения задачи линейного программирования (см. идею доказательства в [3]).

Тогда для нахождения управления $u_j^0(\cdot|\,\tau, x^*(\tau))$ (приближенно) получим задачу

$$V_j(\tau, z) = \min_{u_j,\alpha} \alpha,$$
$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_j(t), \quad x(\tau) = x^*(\tau), \quad u_j(t) \in U, \; t \in \{\tau, \tau+1, \ldots, t_{j+1}-1\}, \qquad (7)$$
$$Px(t_{j+1}) \leqslant f_{j+1}(0) + \lambda_{j+1}\alpha - \gamma_j,$$

где $\gamma_j = (\gamma_{jk}, k \in K)$: $\gamma_{jk} = w_{\max} \sum_{t \in \Delta_j} ||p_k' A^t M||_1$. Очевидно, задача (7) сводится к задаче линейного программирования, что выгодно отличает полученный результат от работы [1].

В докладе будет показано, как осуществляется коррекция предыдущего решения $u_0^0(\cdot|\,\tau-1, x^*(\tau-1))$ для быстрого построения текущего решения $u_0^0(\cdot|\,\tau, x^*(\tau))$.

Литература

1. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью* // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 2. С. 265–286.

2. Kostina E., Kostyukova O. *Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances* // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2009. V. 19. № 17. P. 1940–1958.

3. Kastsiukevich D.A., Dmitruk N.M. *A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem* // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2021. № 2. P. 38–49.

УПРАВЛЕНИЕ И НАБЛЮДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.П. Жабко, В.С. Жигалов

1. Введение. В работе рассматривается система дифференциально–разностных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(\alpha t) + f(t), \qquad (1)$$

где A_0, A_1 – $(n \times n)$-матрицы, $\alpha \in (0, 1)$, $f(t)$ – заданная на $[t_0, T]$ кусочно-непрерывная функция.

Зададим наблюдение

$$y(t) = Cx(t), \qquad (2)$$

где $y(t)$ -– известная вектор-функция размерности r, C – $(r \times n)$-матрица.

Определение 1. Система $(1), (2)$ называется *полностью наблюдаемой на промежутке* $[t_0, T]$, если по значениям вектора наблюдений $y(t)$ на $[t_0, T]$ можно однозначно восстановить движение системы на начальном множестве — вектор $\phi(t)$.

2. Предварительные рассуждения. Рассмотрим случай вырожденной матрицы A_1. Существует такая матрица D, что $DA_1 = 0$. Если $DA_0 = \Lambda D$, то после замены $Dx = z$ получаем систему

$$\dot{z} = \Lambda z + Df(t). \qquad (3)$$

Система (3) – ненаблюдаемая часть системы (1). Данные рассуждения применимы для любых начальных точек t_0. Из чего следует