Тогда для нахождения управления $u_j^0\big(\cdot|\,\tau, x^*(\tau)\big)$ (приближенно) получим задачу

$$V_j(\tau, z) = \min_{u_j,\alpha} \alpha,$$
$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_j(t), \quad x(\tau) = x^*(\tau), \quad u_j(t) \in U, \ t \in \{\tau, \tau+1, \ldots, t_{j+1}-1\}, \qquad (7)$$
$$Px(t_{j+1}) \leqslant f_{j+1}(0) + \lambda_{j+1}\alpha - \gamma_j,$$

где $\gamma_j = (\gamma_{jk}, k \in K)$: $\gamma_{jk} = w_{\max} \sum_{t\in\Delta_j} ||p_k' A^t M||_1$. Очевидно, задача (7) сводится к задаче линейного программирования, что выгодно отличает полученный результат от работы [1].

В докладе будет показано, как осуществляется коррекция предыдущего решения $u_0^0(\cdot|\,\tau-1, x^*(\tau-1))$ для быстрого построения текущего решения $u_0^0(\cdot|\,\tau, x^*(\tau))$.

Литература

1. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью* // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 2. С. 265–286.

2. Kostina E., Kostyukova O. *Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances* // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2009. V. 19. № 17. P. 1940–1958.

3. Kastsiukevich D.A., Dmitruk N.M. *A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem* // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2021. № 2. P. 38–49.

УПРАВЛЕНИЕ И НАБЛЮДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.П. Жабко, В.С. Жигалов

1. Введение. В работе рассматривается система дифференциально–разностных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(\alpha t) + f(t), \qquad (1)$$

где A_0, A_1 – $(n \times n)$-матрицы, $\alpha \in (0, 1)$, $f(t)$ – заданная на $[t_0, T]$ кусочно-непрерывная функция.

Зададим наблюдение

$$y(t) = Cx(t), \qquad (2)$$

где $y(t)$ -– известная вектор-функция размерности r, C – $(r \times n)$-матрица.

Определение 1. Система $(1), (2)$ называется *полностью наблюдаемой на промежутке* $[t_0, T]$, если по значениям вектора наблюдений $y(t)$ на $[t_0, T]$ можно однозначно восстановить движение системы на начальном множестве — вектор $\phi(t)$.

2. Предварительные рассуждения. Рассмотрим случай вырожденной матрицы A_1. Существует такая матрица D, что $DA_1 = 0$. Если $DA_0 = \Lambda D$, то после замены $Dx = z$ получаем систему

$$\dot{z} = \Lambda z + Df(t). \qquad (3)$$

Система (3) – ненаблюдаемая часть системы (1). Данные рассуждения применимы для любых начальных точек t_0. Из чего следует

Теорема 1. *Если матрица A_1 – вырожденная, и для некоторой ненулевой матрицы D выполнены условия $DA_1 = 0$ и $DA_0 = \Lambda D$, то система (1), (2) не является полностью наблюдаемой.*

Далее считаем матрицу A_1 невырожденной.

3. Построение начальной функции. Сделаем в системе (1), (2) замену

$$x(t) = e^{A_0 t} z(t).$$

Получим

$$\begin{cases} e^{A_0 t}\dot{z} = A_1\phi(\alpha t) + f(t), \\ y(t) = e^{A_0 t} z. \end{cases} \tag{4}$$

Из первого уравнения системы (4) получаем равенство

$$\phi(\alpha t) = A_1^{-1}[e^{A_0 t}\dot{z} - f(t)],$$

где возникает член $e^{A_0 t}\dot{z}$. Из второго уравнения (7) получаем

$$\dot{y}(t) = A_0 e^{A_0 t} z + e^{A_0 t}\dot{z},$$

откуда можно выразить $e^{A_0 t}\dot{z}$.

Замечание. Поскольку при дифференцировании наблюдения могут возникать погрешности, то приближаем функцию $\dot{x}_{\text{ист}}(t)$ равенством

$$\dot{x}_{\text{ист}}(t) \approx \frac{1}{K\delta}\sum_{j=1}^{K}[x(t-2j\delta) - x(t-(2j-1)\delta)],$$

где δ – малая величина, K – целое.

4. Случай неполного наблюдения. Предположим, что матрица $C \neq E$. Введем вспомогательную систему уравнений

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + A_1 z(\alpha t) + L_0\big(Cz(t) - y(t)\big) + L_1\big(Cz(\alpha t) - y(\alpha t)\big), \tag{5}$$

которую назовем *асимптотическим наблюдателем.*

Теорема 2. *Если существуют такие матрицы L_0 и L_1, что матрица $(A_0{+}L_0C)$ – гурвицева, а матрица $(A_0 + L_0C)^{-1}(A_1 + L_1C)$ имеет все собственные числа в единичном круге, то справедливо предельное соотношение $z(t) \to x(t)$ при $t \to \infty$.*

Доказательство следует из [1]. Далее начальная функция строится по изложенному в п. 3 алгоритму с заменой вектора $x(t)$ его асимптотическим приближением $z(t)$.

5. Программное асимптотическое управление. Рассмотрим систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(\alpha t) + B\nu + f(t), \tag{6}$$

где ν – управление.

Определение 2. Будем говорить, что система (6), (2) *асимптотически управляема на промежутке* $[t_0, T]$, $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$, если для любой векторной функции $\psi(t) \in C[T, \alpha^{-1}T]$ существует такое управление $\nu(t, y)$, при котором решение $x(t)$ системы (6) удовлетворяет условию $x(t) \to \hat{x}(t)$, $t \to \infty$. Здесь $\hat{x}(t)$ – решение системы (1) с начальной функцией $\hat{x}(t) = \psi(t)$, $t \in [T, \alpha^{-1}T]$.

Теорема 3. *Предположим, что решение $\hat{x}(t)$ определено на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$. Определим функцию $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$. Пусть матрицы L_0, L_1 удовлетворяют условиям Теоремы 2, а матрицы F_0, F_1 такие, что матрица $(A_0 + F_0C)$ –*

гурвицева и у матрицы $(A_0 + F_0C)^{-1}(A_1 + F_1C)$ все собственные числа лежат в единичном круге. Тогда решением системы (6) и системы:

$$\dot{z}(t) = A_0z(t) + A_1z(\alpha t) + L_0(Cz(t) - \hat{y}(t)) + L_1(Cz(\alpha t) - \hat{y}(\alpha t)) \tag{7}$$

является

$$\nu(t) = F_0w(t) + F_1w(\alpha t),$$
$$w(t) = z(t) + Pz(t) + Qz(\alpha t).$$

Матрицы P и Q выбираются согласно работе [2].

Заключение. В работе предложена теорема, дающая необходимое условие полной наблюдаемости систем вида (1), (2) и предложен метод построения приближения движения дифференциально–разностной системы с использованием асимптотического наблюдателя.

Литература

1. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. *Устойчивость дифференциально–разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 316–325.

2. Zhabko A. P., Tikhomirov O. G., Chizhova O. N. *The Prediction Scheme to the Linear Systems with Linearly Increasing and Constant Delays* // Fourth International Conference Dedicated to the Memory of Professor Vladimir Zubov, N. Smirnov, and A. Golovkina eds. Stability and Control Processes, 2020. P. 207–213.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В задачах с сингулярными возмущениями эти динамические системы являются жесткими, и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Применение асимптотических методов позволяет не только избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, но и свести исходную задачу оптимального управления к решению задач меньшей размерности.

В основе применяемой методики исследования лежит идея конечномерной параметризации оптимальных управлений. Для многих задач оптимизации динамических систем можно указать конечномерные элементы (назовем их определяющими), по которым легко восстанавливается решение задачи, причем в возмущенных задачах, что очень существенно, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. К определяющим элементам, в частности, относятся точки переключения релейных управлений, начальные и конечные моменты особых и квазиособых режимов, множители Лагранжа, длительность процесса (в том случае, когда она не задана). С помощью принципа максимума и условий допустимости управлений для определяющих элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно составить систему конечных уравнений