$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \tag{1}$$

где μ -– малый параметр. Назовем эти уравнения, как и их корни, определяющими. Формируются уравнения (1) путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются возмущенными. Применяя метод пограничных функций, можно разложить функции $F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu)$, $i = \overline{1, k}$, по степеням малого параметра

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_k, \mu) \sim F_{i0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \mu F_{i1}(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \ldots, \quad i = \overline{1, k},$$

а затем в условиях применимости теоремы о неявной функции методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику решения системы (1). Для построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка достаточно заменить неизвестные определяющие элементы $a_i(\mu)$, $i = \overline{1, k}$, их асимптотическими приближениями соответствующего порядка. Основная трудность при реализации описанной схемы состоит в нахождении старших коэффициентов разложения определяющих элементов, т.е. корней системы нулевого приближения

$$F_{i0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0, \quad i = \overline{1, k}. \tag{2}$$

Оказывается, что если же исходная задача оптимального управления является сингулярно возмущенной, то корнями системы (2), как правило, будут определяющие элементы двух задач меньшей размерности. Одной из них является вырожденная задача, а вторая подбирается в результате анализа системы (2), что представляет собой неформальный этап исследования. Описанный подход удобен для численной реализации, поскольку при его применении дело сводится к разложению конечномерных элементов.

В докладе представлен обзор результатов, полученных для задач оптимизации сингулярно возмущенных систем в Минской школе по оптимальному управлению.

ПСЕВДОПРОЛОНГАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Б.С. Калитин

В работе Т. Ура [1] представлено перспективное направление развития качественной теории устойчивости движения – теория пролонгаций. В дальнейшем эта теория использовалась в работах Ж.П. Ауслэндера, П. Сейберта, А. Пэльчера, О. Хайека и др. (см. [2-11]). Напомним необходимые обозначения и определения [8, 10]: $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система на метрическом пространстве X с метрикой $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$; $B(N, \alpha) = \{x \in X : d(N, x) < \alpha\}$ для $\alpha > 0$; (x_n) – последовательность точек в X; $L^+(x)$ – множество ω-(α-)предельных точек для $x \in X$; $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$ – фазовое отображение, $\pi(x, t) = xt$.

Определение 1. Пусть $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система и M – замкнутое подмножество X. Будем говорить, что M :
-*устойчивое*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0) : \ d(M, xt) < \varepsilon \quad \forall t \geqslant 0;$$

-притягивающее (*слабо притягивающее*), если область притяжения $A^+(M)$ (область слабого притяжения $A^+_\omega(M)$) является окрестностью M;
-асимптотически устойчивое, если оно устойчивое и притягивающее.

Определение 2. Полудинамическая система $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ называется *асимптотически компактной на множестве* W, если для любой пары последовательностей $(x_n) \subset W$ и $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ таких, что $x_n[0, t_n] \subset W$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t_n \to +\infty$, последовательность $(x_n t_n)$ относительно компактна.

Определение 3. [9, с. 24] Пусть $(X, \mathbb{R}, \pi)$ –динамическая система на метрическом пространстве X. *Пролонгацией точки* $x \in X$ называется отображение $D^+ : X \to 2^X$, определяемое формулой

$$D^+(x) = \big\{y \in X : \exists (x_n) \subset X, \exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+ \text{ такие, что } x_n \to x \text{ и } x_n t_n \to y\big\}.$$

Если M – замкнутое множество, то $D^+(M) = \bigcup\limits_{m \in M} D^+(m)$ называется *пролонгацией множества* M.

Определение 4. [11] Пусть $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система на метрическом пространстве X. *Псевдопролонгацией точки* $x \in X$ называется отображение $\sigma^+ : X \to 2^X$, определяемое формулой

$$\sigma^+(x) = \big\{y \in X : \exists (x_n) \subset X,\ \exists (t_n) \subset \mathbb{R}^+ \text{ такие, что } x_n \to x \text{ и } x_n t_n = y\ \forall n \in \mathbb{N}\big\}. \quad (1)$$

Если M – замкнутое множество, то $\sigma^+(M) = \bigcup\limits_{m \in M} \sigma^+(m)$ называется *псевдопролонгацией множества* M.

Очевидно, что $\sigma^+(M) \subset D^+(M)$.

Теорема 1. *Пусть* $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ *– полудинамическая система на метрическом пространстве* X *и* $M \subset X$ *– замкнутое множество. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) $M \subset \sigma(M)$;
2) *если* M *положительно инвариантно, то* $\sigma(M)$ *положительно инвариантно, а множество* $\sigma(M) \backslash M$ *инвариантно и для точек* $x \in M$ *и* $y \in X \backslash M$ *в условии (1)* $t_n \to +\infty$;
3) *если* M *связно, компактно и инвариантно, а* $\sigma(M)$ *компактно, то* $\sigma(M)$ *связно.*

Определение 5. [11, с. 32] Пусть $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ – полудинамическая система на метрическом пространстве X и $M \subset X$ – замкнутое инвариантное множество. Точка x из X называется *слабо эллиптической точкой* M, если $L^+(x) \bigcap M \neq \emptyset$ и $L^-(x) \bigcap M \neq \emptyset$.

Теорема 2. *Пусть* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *– динамическая система на метрическом пространстве* X *и* $M \subset X$ *– компактное слабо притягивающее множество. Предположим, что* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *асимптотически компактна при* $t \to +\infty$ *и при* $t \to -\infty$ *в области слабого притяжения* $A^+{}_\omega(M)$. *Тогда псевдопролонгация* $\sigma^+(M)$ *является наименьшим компактным инвариантным асимптотически устойчивым множеством, содержащим* M, *причем*

$$A^+{}_\omega(M) = A^+\big(\sigma^+(M)\big).$$

Теорема 3. *Пусть* $(X, \mathbb{R}, \pi)$ *– динамическая система на локально компактном метрическом пространстве* X *и* $M \subset X$ *– компактное слабо притягивающее множество. Тогда имеют место равенства* $\sigma^+(M) = E_\omega(M) = D^+(M)$.

Литература

1. Ura T. *Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace a n dimentions* // Ecole Normale Sup. 1953. V. 70. P. 287–360.

2. Seibert P. *Prolongations and generalized Liapunov functions* // Tech. Rep. 61-7 RIAS, Baltimore. 1961. P. 454–462.

3. Auslander J. P., Seibert P. *Prolongations and stability in dynamical systems* // Grenoble. Ann. Inst. Fourier. 1964. V. 14(2). P. 237–267.

4. Ладис Н. Н. *Топологическая эквивалентность некоторых дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8(7). С. 1116–1119.

5. Pelczar A. *Semi-stability of motions and regular dependence of limit sets on points in general semi-systems* // Annales Polon. Math. 1983. V. 42. P. 263–282.

6. Рейзинь Л. Э. *Функции Ляпунова и проблема различения.* Рига: Зинатне, 1986.

7. Pelczar A. *Prolongations and prolongational limit sets in generalized semi-systems on metric spaces* // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematia. 1994. V. 31. P. 203–240.

8. Hajek O. *Prolongation in topological dynamical* // Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems. II. Lectur Notes in Math. Berlin; Heidelberg; New-York: Springer, 1970. V. 144. P. 79–89.

9. Bhatia N. P., Szegö G. *Stability theory of Dynamical systems.* Berlin; New-York: Springer, 1970.

10. Калитин Б. С. *Качественная теория устойчивости движения динамических систем.* Минск: БГУ, 2002.

11. Калитин Б. С. *Устойчивость динамических систем (Качественная теория).* Саарбрюкен: LAP Lambert Academic Publishing, 2012.

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРОВ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

А.М. Камачкин, Д.К. Потапов, В.В. Евстафьева

Рассмотрим математические модели систем автоматического управления, которые описываются n-мерными системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma) + Kf(t) \tag{1}$$

(модель неавтономной системы) и

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma) \tag{2}$$

(модель автономной системы). Здесь X – вектор состояний системы, $X \in E^n$, E^n – n-мерное евклидово пространство, A – постоянная ненулевая матрица размерности $n \times n$ с вещественными элементами, B и K – постоянные ненулевые векторы из E^n с вещественными элементами, $F(\sigma)$ – функция, описывающая нелинейность типа неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями l_1, l_2 $(l_1 < l_2)$ и значениями выхода m_1, m_2 $(m_1 < m_2)$, $\sigma = (\Gamma, X)$ – скалярное произведение векторов Γ и X, где Γ – постоянный ненулевой вектор из E^n с вещественными элементами. Функция $F\big(\sigma(t)\big)$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geqslant 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задается в соответствии с [1] следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leqslant l_1$ следует равенство $F(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geqslant l_2$ следует равенство $F(\sigma) = m_2$, а из неравенств $l_1 < \sigma(t) < l_2$ $(t_1 < t \leqslant t_2)$ следует равенство $F\big(\sigma(t_1)\big) = F\big(\sigma(t_2)\big)$. Таким образом, $F\big(\sigma(t)\big)$ принимает постоянное значение на отрезке $[t_1, t_2]$, если либо $F\big(\sigma(t_1)\big) = m_1$ и $\sigma(t) < l_2$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $F\big(\sigma(t_1)\big) = m_2$ и $\sigma(t) > l_1$ при $t \in [t_1, t_2]$. В приложениях функцию