Литература

1. Ura T. *Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace a n dimentions* // Ecole Normale Sup. 1953. V. 70. P. 287–360.

2. Seibert P. *Prolongations and generalized Liapunov functions* // Tech. Rep. 61-7 RIAS, Baltimore. 1961. P. 454–462.

3. Auslander J. P., Seibert P. *Prolongations and stability in dynamical systems* // Grenoble. Ann. Inst. Fourier. 1964. V. 14(2). P. 237–267.

4. Ладис Н. Н. *Топологическая эквивалентность некоторых дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8(7). С. 1116–1119.

5. Pelczar A. *Semi-stability of motions and regular dependence of limit sets on points in general semi-systems* // Annales Polon. Math. 1983. V. 42. P. 263–282.

6. Рейзинь Л. Э. *Функции Ляпунова и проблема различения.* Рига: Зинатне, 1986.

7. Pelczar A. *Prolongations and prolongational limit sets in generalized semi-systems on metric spaces* // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematia. 1994. V. 31. P. 203–240.

8. Hajek O. *Prolongation in topological dynamical* // Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems. II. Lectur Notes in Math. Berlin; Heidelberg; New-York: Springer, 1970. V. 144. P. 79–89.

9. Bhatia N. P., Szegö G. *Stability theory of Dynamical systems.* Berlin; New-York: Springer, 1970.

10. Калитин Б. С. *Качественная теория устойчивости движения динамических систем.* Минск: БГУ, 2002.

11. Калитин Б. С. *Устойчивость динамических систем (Качественная теория).* Саарбрюкен: LAP Lambert Academic Publishing, 2012.

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРОВ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

А.М. Камачкин, Д.К. Потапов, В.В. Евстафьева

Рассмотрим математические модели систем автоматического управления, которые описываются n-мерными системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma) + Kf(t) \tag{1}$$

(модель неавтономной системы) и

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma) \tag{2}$$

(модель автономной системы). Здесь X – вектор состояний системы, $X \in E^n$, E^n – n-мерное евклидово пространство, A – постоянная ненулевая матрица размерности $n \times n$ с вещественными элементами, B и K – постоянные ненулевые векторы из E^n с вещественными элементами, $F(\sigma)$ – функция, описывающая нелинейность типа неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями l_1, l_2 $(l_1 < l_2)$ и значениями выхода m_1, m_2 $(m_1 < m_2)$, $\sigma = (\Gamma, X)$ – скалярное произведение векторов Γ и X, где Γ – постоянный ненулевой вектор из E^n с вещественными элементами. Функция $F\big(\sigma(t)\big)$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geqslant 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задается в соответствии с [1] следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leqslant l_1$ следует равенство $F(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geqslant l_2$ следует равенство $F(\sigma) = m_2$, а из неравенств $l_1 < \sigma(t) < l_2$ $(t_1 < t \leqslant t_2)$ следует равенство $F\big(\sigma(t_1)\big) = F\big(\sigma(t_2)\big)$. Таким образом, $F\big(\sigma(t)\big)$ принимает постоянное значение на отрезке $[t_1, t_2]$, если либо $F\big(\sigma(t_1)\big) = m_1$ и $\sigma(t) < l_2$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $F\big(\sigma(t_1)\big) = m_2$ и $\sigma(t) > l_1$ при $t \in [t_1, t_2]$. В приложениях функцию

$F(\sigma)$ называют нелинейной характеристикой системы [2]. Петля гистерезиса, описываемая в координатах (σ, F) уравнениями $\sigma = \sigma(t)$, $F = F\big(\sigma(t)\big)$, обходится против хода часовой стрелки (см. рисунок, например, в [3]). Функцию $F(\sigma)$ рассматриваем в качестве управления. Функция $f(t)$ описывает внешнее воздействие на систему и может быть как периодической, так и непериодической, но в любом случае полагаем, что она непрерывная и ограниченная, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(t)| \leqslant M$ для любой вещественной переменной $t \geqslant 0$.

Из последних работ по исследованию нелинейных систем, замкнутых обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом, отметим [4–11].

Наряду с периодическими рассматриваем ограниченные решения изучаемых систем, т. е. решения, расположенные в некоторой ограниченной области фазового пространства. Имеют место нижеследующие теоремы (см. [11]).

Теорема 1. *Пусть, кроме предположений, сделанных выше относительно правой части системы (1), все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, и выполнены следующие условия:*

$$-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) < l_1, \quad -(\Gamma, A^{-1}Bm_1) > l_2.$$

Тогда все установившиеся движения системы (1) принадлежат некоторой ограниченной области фазового пространства или, иначе, изображающая точка любого решения системы (1) за конечное время попадет и останется в некоторой ограниченной области фазового пространства.

Теорема 2. *Пусть при некотором наборе параметров матрицы A, векторов B, K, Γ и функций $F(\sigma)$, $f(t)$ система (1) удовлетворяет условиям теоремы 1 и имеет хотя бы одно периодическое решение с $2n$ $(n \in \mathbb{N})$ изолированными точками переключения $X^1, \ldots, X^{2n}$, расположенными на поверхностях переключения $(\Gamma, X) = l_1$ и $(\Gamma, X) = l_2$. Тогда точки переключения локально непрерывно зависят от этого набора параметров, если*

$$\begin{vmatrix} (\Gamma, (X^1)'_{t_1}) \ldots (\Gamma, (X^1)'_{t_{2n}}) \\ \ldots \\ (\Gamma, (X^{2n})'_{t_1}) \ldots (\Gamma, (X^{2n})'_{t_{2n}}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $t_1, \ldots, t_{2n}$ – моменты времени переключения, $(X^i)'_{t_j}$ – частная производная элементов вектора X^i по переменной t_j $(i, j = \overline{1, 2n})$.

Теорема 3. *Пусть система (2) удовлетворяет условиям теорем 1 и 2 относительно параметров матрицы A, векторов B, Γ, функции $F(\sigma)$ и, кроме того, $(\Gamma, B) \neq 0$. Тогда унимодальное* [12] *периодическое решение системы (2) локально непрерывно зависит от указанных параметров, если выполняется неравенство*

$$(\Gamma, \Theta_1(e^{AT}Bm_1 + e^{A\tau_1}B(m_2 - m_1) - Bm_2))(\Gamma, \Theta_2 e^{A\tau_2}B(m_1 - m_2)) +$$
$$+(\Gamma, \Theta_2 e^{A\tau_1}B(m_2 - m_1))(\Gamma, \Theta_1(e^{AT}Bm_2 + e^{A\tau_2}B(m_1 - m_2) - Bm_1)) +$$
$$+(\Gamma, \Theta_2(e^{AT}Bm_1 + e^{A\tau_1}B(m_2 - m_1)))(\Gamma, \Theta_2(e^{AT}Bm_2 + e^{A\tau_2}B(m_1 - m_2))) -$$
$$-(\Gamma, \Theta_2 e^{AT}Bm_1)(\Gamma, \Theta_2 e^{AT}Bm_2) \neq 0,$$

где $\Theta_1 = (E - e^{AT})^{-2}e^{AT}$, $\Theta_2 = (E - e^{AT})^{-1}$, E – единичная матрица, $T = \tau_1 + \tau_2$, τ_1, τ_2 – времена переходов изображающей точки между поверхностями переключения.

Полученные результаты дают достаточное условие ограниченности решений существенно нелинейной неавтономной системы (теорема 1), а в случае наличия у такой системы периодических решений достаточные условия независимости конфигураций этих решений от достаточно малых изменений параметров системы (теоремы 2 и 3). Более того, выписаны условия, позволяющие исследователям ограничивать выбор параметров системы. Применение теоремы 3 иллюстрируется на примере системы (2) при $n = 2$.

Литература

1. Покровский А. В. *Существование и расчет устойчивых режимов в релейных системах* // Автомат. и телемех. 1986. № 4. С. 16–23.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний.* М.: Физматгиз, 1959.
3. Leonov G. A., Shumafov M. M., Teshev V. A., Aleksandrov K. D. *Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations* // Differ. Eq. 2017. V. 53. № 13. P. 1764–1816.
4. Евстафьева В. В. *Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа* // Укр. матем. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
5. Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В. *Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. управ. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199.
6. Фурсов А. С., Тодоров Т. С., Крылов П. А., Митрев Р. П. *О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
7. Евстафьева В. В. *О существовании двухточечно-колебательных решений возмущенной релейной системы с гистерезисом* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
8. Евстафьева В. В. *Существование T/k-периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы* // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
9. Євстаф'єва В. В. *Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці* // Укр. матем. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
10. Фурсов А. С., Митрев Р. П., Крылов П. А., Тодоров Т. С. *О существовании периодического режима в одной нелинейной системе* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.
11. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. *Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system* // Appl. Math. 2022. V. 67. № 1. P. 65–80.
12. Varigonda S., Georgiou T. T. *Dynamics of relay relaxation oscillators* // IEEE Trans. Automat. Control. 2001. V. 46. № 1. P. 65–77.

РАВНОМЕРНАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ ДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Козлов, Т.А. Александрович

Рассмотрим линейную дискретную систему управления [1, с. 214]

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

в которой $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – ограниченные, ω-периодические последовательности соответственно $(n \times n)$- и $(n \times m)$- вещественных матриц $(\omega \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$; $x = x(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $u = u(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ – управляющее воздействие.

Напомним, что последовательность матриц $N(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, называется *ω-периодической*, если найдется число $\omega \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства $N(k+\omega) = N(k)$.