системы периодических решений достаточные условия независимости конфигураций этих решений от достаточно малых изменений параметров системы (теоремы 2 и 3). Более того, выписаны условия, позволяющие исследователям ограничивать выбор параметров системы. Применение теоремы 3 иллюстрируется на примере системы (2) при $n = 2$.

Литература

1. Покровский А. В. *Существование и расчет устойчивых режимов в релейных системах* // Автомат. и телемех. 1986. № 4. С. 16–23.

2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний.* М.: Физматгиз, 1959.

3. Leonov G. A., Shumafov M. M., Teshev V. A., Aleksandrov K. D. *Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations* // Differ. Eq. 2017. V. 53. № 13. P. 1764–1816.

4. Евстафьева В. В. *Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа* // Укр. матем. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.

5. Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В. *Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. управ. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199.

6. Фурсов А. С., Тодоров Т. С., Крылов П. А., Митрев Р. П. *О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.

7. Евстафьева В. В. *О существовании двухточечно-колебательных решений возмущенной релейной системы с гистерезисом* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.

8. Евстафьева В. В. *Существование T/k-периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы* // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.

9. Євстаф'єва В. В. *Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці* // Укр. матем. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.

10. Фурсов А. С., Митрев Р. П., Крылов П. А., Тодоров Т. С. *О существовании периодического режима в одной нелинейной системе* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.

11. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. *Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system* // Appl. Math. 2022. V. 67. № 1. P. 65–80.

12. Varigonda S., Georgiou T. T. *Dynamics of relay relaxation oscillators* // IEEE Trans. Automat. Control. 2001. V. 46. № 1. P. 65–77.

РАВНОМЕРНАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ ДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Козлов, Т.А. Александрович

Рассмотрим линейную дискретную систему управления [1, с. 214]

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

в которой $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – ограниченные, ω-периодические последовательности соответственно $(n \times n)$- и $(n \times m)$- вещественных матриц $(\omega \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$; $x = x(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $u = u(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ – управляющее воздействие.

Напомним, что последовательность матриц $N(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, называется ω*-периодической,* если найдется число $\omega \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства $N(k+\omega) = N(k)$.

Полагаем также, что функция $A:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ является *вполне ограниченной* [2] на $\mathbb{Z}$. Последнее означает [2], что при каждом $k\in\mathbb{Z}$ матрица $A(k)$ обратима и найдется такое число $a\geqslant 1$, при котором имеет место соотношение

$$\sup\{\|A(k)+A^{-1}(k)\|,\ k\in\mathbb{Z}\}\leqslant a.$$

Управление u в системе (1) будем выбирать линейным по состоянию $u(k)=U(k)x(k)$, где $U(k)$, $k\in\mathbb{Z}$, – некоторая последовательность вещественных $(m\times n)$-матриц. В результате получим замкнутую линейную однородную систему с дискретным временем

$$x(k+1)=(A(k)+B(k)U(k))x(k),\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{2}$$

в которой функция $U:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^{m\times n}$ играет роль матричного управляющего воздействия.

Следуя работе [3], далее будем пользоваться нижеприведенным допущением.

Определение 1. [3] Матричное управление $U:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^{m\times n}$ будем называть *допустимым* для системы (2), если выполнены условия:

1) управление $U(\cdot)$ ограничено на $\mathbb{Z}$, т.е. справедливо неравенство

$$\sup\{\|U(k)\|, k\in\mathbb{Z}\}<\infty;$$

2) при каждом $k\in\mathbb{Z}$ матрица $A(k)+B(k)U(k)$ обратима, причем имеет место оценка

$$\sup\big\{\|\big(A(k)+B(k)U(k)\big)^{-1}\|, k\in\mathbb{Z}\big\}<\infty.$$

Определение 2. [1, с. 13–14] Напомним, что *матрица Коши* $X(k,s)\in\mathrm{M}_n$, $k,s\in\mathbb{Z}$, дискретной системы $x(k+1)=A(k)x(k)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{Z}$, определяется равенством

$$X(k,s)=\begin{cases} A(k-1)\cdot A(k-2)\cdot\ldots\cdot A(s) & \text{при } k>s,\\ E & \text{при } k=s,\\ X^{-1}(s,k) & \text{при } k<s.\end{cases}$$

Определение 3. Будем говорить, что линейная дискретная система (2) обладает свойством *равномерной глобальной достижимости*, если существует такое натуральное число $T>0$, что для любых $\alpha>0$ и $\beta>0$ найдется величина $d=d(\alpha,\beta)>0$, при которой для произвольной $(n\times n)$-матрицы Λ, удовлетворяющей неравенствам $|\det\Lambda|\geqslant\alpha$ и $\|\Lambda\|\leqslant\beta$, и всякого $k_0\in\mathbb{Z}$ существует допустимое управление $U\colon\{k_0,k_0+1,\ldots,k_0+T\}\to\mathbb{R}^{m\times n}$, удовлетворяющее при всех $k\in\{k_0,k_0+1,\ldots k_0+T\}$ оценке $\|U(k)\|\leqslant d(\alpha,\beta)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(\cdot,\cdot)$ системы (2) на указанном множестве равенство $X_U(k_0+T,k_0)=\Lambda$.

По-видимому, впервые термин «равномерная глобальная достижимость» был введен В. А. Зайцевым и Е. Л. Тонковым в статье [4] для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad u\in\mathbb{R}^m,\quad n,m\in\mathbb{N},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Свойство равномерной глобальной достижимости линейной системы (2) с дискретным временем (равно как и с непрерывным) дает возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном целочисленном временно́м отрезке фиксированной длины $T\in\mathbb{N}$, т. е. позволяет построить такое допустимое управление U, что множество $\{x_i(k)\}_{i=1}^n$, $k\in\mathbb{Z}$, линейно-независимых решений системы (2) с этим управлением и начальными условиями — соответствующими векторами e_i, $i = \overline{1,n}$, канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ — через время T будет совпадать с произвольным наперед заданным базисом этого пространства.

Замечание 2. Отметим, что существенное отличие свойства равномерной глобальной достижимости линейных дифференциальных систем от дискретных систем заключается в том, что для последних матрица Коши может иметь не только отделенный от нуля положительный, но и отрицательный определитель. Поэтому в определении 3, в отличие от определения равномерной глобальной достижимости линейных дифференциальных систем (см. напр., статью [4]), для квадратной $(n \times n)$-матрицы Λ выполняется неравенство $|\det \Lambda| \geqslant \alpha$.

В работе [5] был установлен критерий равномерной глобальной достижимости линейных систем с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами вида

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Теорема 1. [5] *Система (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда соответствующая замкнутая система (4) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Эта теорема устанавливает эквивалентность наличия свойства равномерной глобальной достижимости у системы (4) и свойства равномерной полной управляемости [6, 7] соответствуюшей линейной управляемой системы (4). Дискретным аналогом последнего свойства служит следующее

Определение 4. [3] Система (1) обладает *свойством равномерной полной управляемости*, если существуют такие числа $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что при любых числе $k_0 \in \mathbb{Z}$ и векторе $x_1 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u(k)$, $k = k_0, k_0+1, \ldots, k_0+K-1$, удовлетворяющее оценке $\|u(k)\| \leqslant \alpha\|x_1\|$, при котором для решения $x(k)$ системы (1) с этим управлением u и начальным условием $x(k_0) = 0$ обеспечивается равенство $x(k_0+K) = x_1$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Пусть матрица $A(\cdot)$ системы (1) вполне ограничена, а матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{Z}$. Тогда если дискретная система управления (1) с ω-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая замкнутая дискретная система (2) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

Литература

1. Гайшун И. В. *Системы с дискретным временем.* Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2001.

2. Демидович В. Б. *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.

3. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. *Pole placement theorem of discrete time-varying linear systems* // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017. V. 55. № 2. P. 671–692.

4. Зайцев В. А., Тонков Е. Л. *Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова* // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 45–56.

5. Козлов А. А. *Критерий равномерной глобальной достижимости периодических систем* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. № 2. С. 221–236.

6. Kalman R. E. *Contribution to the theory of optimal control* // Boletín de la Sociedad Matemátika Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.

7. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ АНСАМБЛЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ДЕСКРИПТОРНОГО РЕГУЛЯТОРА

В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович

Ансамбль линейных непрерывных систем – это совокупность систем, коэффициенты которых принадлежат некоторым заданным множествам [1].

Вопросы управляемости линейных систем динамическими регуляторами исследованы, например, в работе [2]. Однако на практике часто точные значения параметров и начальных состояний таких систем неизвестны. Заданы лишь множества, в которых эти параметры изменяются произвольным образом.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^r$; $A \in \mathbb{R}_{n,n}$, $B \in \mathbb{R}_{n,r}$ – некоторые матрицы.

Пусть $[A]$, $[B]$ – некоторые множества матриц соответственно размеров $n \times n$, $n \times r$ и $[x_0]$ – множество векторов, принадлежащих $\mathbb{R}^n$.

Будем теперь считать, что матрицы A и B и начальное состояние x_0 системы (1) принимают произвольные значения соответственно из множеств $[A]$, $[B]$, $[x_0]$.

Система (1) при указанных условиях – это ансамбль линейных управляемых систем (1).

В качестве управления $u(t)$ рассмотрим управление вида

$$u(t) = Cy(t), \tag{3}$$

где $C \in \mathbb{R}_{r,m}$, а $y(t)$ – выход линейной дескрипторной системы

$$D_0\dot{y}(t) = Dy(t), \quad y(0) = y_0. \tag{4}$$

Здесь $y, y_0 \in \mathbb{R}^m$; D_0, D – $(m \times m)$-постоянные матрицы, причём $\det D_0 = 0$ и пучок матриц $D_0 + \lambda D$ является регулярным.

Ясно, что при любых фиксированных матрицах $A \in [A]$, $B \in [B]$, и векторе $x_0 \in [x_0]$ и управлении (3) существует единственное решение системы (1)

$$\begin{gathered} x(t) = F(t,0)x_0 + \Big(\int\limits_0^t F(t,\tau)BCe^{D_0^d D\tau}d\tau\Big)y_0, \\ y_0 = D_0^d Dq, \end{gathered} \tag{5}$$

где $F(t,\tau)$ – фундаментальная матрица однородной задачи Коши для системы (1), D_0^d – обратная Дразина матрицы D_0 [3], а $q \in \mathbb{R}^m$.

Определение 1. Ансамбль систем (1) называется *управляемым дескрипторным регулятором* (4), если для любого $x_0 \in [x_0]$ найдутся момент времени $t_1 (t_1 < +\infty)$ и m-вектор q такие, что сечения $\{x(t_1)\}$ всех решений ансамбля обращаются в нуль.

Отметим, что в такой постановке задача управляемости ансамбля будет иметь решение лишь в исключительных случаях. Поэтому будем решать задачу построения