7. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ АНСАМБЛЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ДЕСКРИПТОРНОГО РЕГУЛЯТОРА

В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович

Ансамбль линейных непрерывных систем – это совокупность систем, коэффициенты которых принадлежат некоторым заданным множествам [1].

Вопросы управляемости линейных систем динамическими регуляторами исследованы, например, в работе [2]. Однако на практике часто точные значения параметров и начальных состояний таких систем неизвестны. Заданы лишь множества, в которых эти параметры изменяются произвольным образом.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^r$; $A \in \mathbb{R}_{n,n}$, $B \in \mathbb{R}_{n,r}$ – некоторые матрицы.

Пусть $[A]$, $[B]$ – некоторые множества матриц соответственно размеров $n \times n$, $n \times r$ и $[x_0]$ – множество векторов, принадлежащих $\mathbb{R}^n$.

Будем теперь считать, что матрицы A и B и начальное состояние x_0 системы (1) принимают произвольные значения соответственно из множеств $[A]$, $[B]$, $[x_0]$.

Система (1) при указанных условиях – это ансамбль линейных управляемых систем (1).

В качестве управления $u(t)$ рассмотрим управление вида

$$u(t) = Cy(t), \tag{3}$$

где $C \in \mathbb{R}_{r,m}$, а $y(t)$ – выход линейной дескрипторной системы

$$D_0\dot{y}(t) = Dy(t), \quad y(0) = y_0. \tag{4}$$

Здесь $y, y_0 \in \mathbb{R}^m$; D_0, D – $(m \times m)$-постоянные матрицы, причём $\det D_0 = 0$ и пучок матриц $D_0 + \lambda D$ является регулярным.

Ясно, что при любых фиксированных матрицах $A \in [A]$, $B \in [B]$, и векторе $x_0 \in [x_0]$ и управлении (3) существует единственное решение системы (1)

$$\begin{gathered} x(t) = F(t,0)x_0 + \Big(\int\limits_0^t F(t,\tau)BCe^{D_0^d D\tau}d\tau\Big)y_0, \\ y_0 = D_0^d Dq, \end{gathered} \tag{5}$$

где $F(t,\tau)$ – фундаментальная матрица однородной задачи Коши для системы (1), D_0^d – обратная Дразина матрицы D_0 [3], а $q \in \mathbb{R}^m$.

Определение 1. Ансамбль систем (1) называется *управляемым дескрипторным регулятором* (4), если для любого $x_0 \in [x_0]$ найдутся момент времени $t_1 (t_1 < +\infty)$ и m-вектор q такие, что сечения $\{x(t_1)\}$ всех решений ансамбля обращаются в нуль.

Отметим, что в такой постановке задача управляемости ансамбля будет иметь решение лишь в исключительных случаях. Поэтому будем решать задачу построения

такого управления (найти такое q), чтобы каждое решение $x(t)$ ансамбля удовлетворяло неравенству

$$|x(t_1)| \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

где $|x(t_1)|$ – вектор, составленный из модулей компонент вектора $x(t_1)$, а вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \geqslant 0$, здесь $\varepsilon_i \geqslant 0$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Ставится задача: найти вектор $\varepsilon \geqslant 0$ такой, что скалярное произведение

$$e'\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

было минимальным.

Таким образом, все траектории $x(t_1)$ в момент времени t_1 ансамбля обладают свойством, что попадают в "минимальную" окрестность нуля.

Учитывая (6), получим, что ансамбль управляем дескрипторным регулятором (4), когда при некотором $t_1\,(t_1 \in +\infty)$ для любого $x_0 \in [x_0]$ найдется такой m-вектор q (один и тот же для всех систем ансамбля), что выполняется неравенство

$$|x(t_1, q)| = |M(t_1)q - P| \leqslant \varepsilon.$$

Здесь $x(t_1, q) \equiv x(t_1)$, $M(t_1) = \int\limits_0^{t_1} F(t_1, \tau) BCe^{D_0^d D\tau} D_0^d D_0 d\tau$, $P = -F(t_1, 0)x_0$.

Тогда "минимальная" ε-окрестность нуля может быть найдена как решение задачи

$$\begin{aligned} &e'\varepsilon \to \min, \\ &-\varepsilon \leqslant Mq - P \leqslant \varepsilon, \\ &\varepsilon \geqslant 0,\ q \in Q,\ Q \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{7}$$

относительно переменных ε и q, Q – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^m$.

Следовательно, для управляемости ансамбля в смысле определения достаточно, чтобы задача (7) имела оптимальный план ε^0, q^0 с $\varepsilon^0 = 0$.

В частном случае, когда интервалы $[A], [B]$ вырождены, получаем известные результаты, установленные в работах [2, 4].

Литература

1. Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. *Управление ансамблем линейных дескрипторных двухпараметрических систем* // Весцi НАН РБ. 2018. № 1. С. 20–23.

2. Игнатенко В. В. *Управляемость динамических систем с помощью регулятора* // Вестник БГУ. сер.1. 1976. № 2. С. 56–58.

3. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose N. J. *Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular Coefficients* // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 31. № 3. P. 411–425.

4. Игнатенко В. В., Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *К управляемости линейных систем дескрипторными регуляторами* // Труды БГТУ. 2017. Сер. 3. № 1. С. 5–7.

О СРАВНЕНИИ ПРИЗНАКОВ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.В. Малыгина

Разностные уравнения с запаздыванием (Delay Difference Equations) в последние десятилетия активно используются для моделирования различных процессов в биологии, экологии, экономике. Интересно отметить, что эти уравнения все чаще обоснованно сопоставляются не с обыкновенными, а с функционально-дифференциальными