такого управления (найти такое q), чтобы каждое решение $x(t)$ ансамбля удовлетворяло неравенству

$$|x(t_1)| \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

где $|x(t_1)|$ – вектор, составленный из модулей компонент вектора $x(t_1)$, а вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \geqslant 0$, здесь $\varepsilon_i \geqslant 0$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Ставится задача: найти вектор $\varepsilon \geqslant 0$ такой, что скалярное произведение

$$e'\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

было минимальным.

Таким образом, все траектории $x(t_1)$ в момент времени t_1 ансамбля обладают свойством, что попадают в "минимальную" окрестность нуля.

Учитывая (6), получим, что ансамбль управляем дескрипторным регулятором (4), когда при некотором $t_1\, (t_1 \in +\infty)$ для любого $x_0 \in [x_0]$ найдется такой m-вектор q (один и тот же для всех систем ансамбля), что выполняется неравенство

$$|x(t_1, q)| = |M(t_1)q - P| \leqslant \varepsilon.$$

Здесь $x(t_1, q) \equiv x(t_1)$, $M(t_1) = \int\limits_0^{t_1} F(t_1, \tau) BCe^{D_0^d D\tau} D_0^d D_0 d\tau$, $P = -F(t_1, 0)x_0$.

Тогда "минимальная" ε-окрестность нуля может быть найдена как решение задачи

$$\begin{array}{l} e'\varepsilon \to \min, \\ -\varepsilon \leqslant Mq - P \leqslant \varepsilon, \\ \varepsilon \geqslant 0,\, q \in Q,\, Q \in \mathbb{R}^m, \end{array} \tag{7}$$

относительно переменных ε и q, Q – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^m$.

Следовательно, для управляемости ансамбля в смысле определения достаточно, чтобы задача (7) имела оптимальный план ε^0, q^0 с $\varepsilon^0 = 0$.

В частном случае, когда интервалы $[A], [B]$ вырождены, получаем известные результаты, установленные в работах [2, 4].

Литература

1. Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. *Управление ансамблем линейных дескрипторных двухпараметрических систем* // Весцi НАН РБ. 2018. № 1. С. 20–23.

2. Игнатенко В. В. *Управляемость динамических систем с помощью регулятора* // Вестник БГУ. сер.1. 1976. № 2. С. 56–58.

3. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose N. J. *Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular Coefficients* // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 31. № 3. P. 411–425.

4. Игнатенко В. В., Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *К управляемости линейных систем дескрипторными регуляторами* // Труды БГТУ. 2017. Сер. 3. № 1. С. 5–7.

О СРАВНЕНИИ ПРИЗНАКОВ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.В. Малыгина

Разностные уравнения с запаздыванием (Delay Difference Equations) в последние десятилетия активно используются для моделирования различных процессов в биологии, экологии, экономике. Интересно отметить, что эти уравнения все чаще обоснованно сопоставляются не с обыкновенными, а с функционально-дифференциальными уравнениями, к которым разностные уравнения с запаздыванием по своей природе оказались ближе. Эта аналогия явилась основой новых методов исследования разностных уравнений и дала возможность получить новые результаты. В этой связи интересно сравнение, например, эффективных признаков устойчивости, полученных для дифференциальных и разностных уравнений с запаздыванием.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с сосредоточенным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = -\sum_{k=1}^{K} a_k(t)x(t - h_k(t)), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

и разностное уравнение

$$x(n+1) - x(n) = -\sum_{k=1}^{K} a_k(n)x(n - h_k(n)), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2}$$

которое можно считать дискретным аналогом уравнения (1). Приведем два признака устойчивости для уравнений (1) и (2), которые можно рассматривать как обобщение «3/2-теоремы» А. Д. Мышкиса.

Обозначим $a(t) = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k(t)$, $h(t) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant K} h_k(t)$.

Теорема 1. [1] *Пусть* $a_k(t) \geqslant 0$, $h_k(t) \geqslant 0$ *при любом* $k = \overline{1, K}$. *Если*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \int\limits_{t-h(t)}^{t} a(s)\, ds < \frac{3}{2}, \tag{3}$$

то для функции Коши уравнения (1) при некоторых $N, \alpha > 0$ *справедлива оценка*

$$|C(t,s)| \leqslant N \exp\left\{ -\alpha \int\limits_{s}^{t} a(\tau)\, d\tau \right\}, \quad t \geqslant s \geqslant 0. \tag{4}$$

Теорема 2. [2] *Пусть* $a_k(n) \geqslant 0$, $h_k(n) \geqslant 0$ *при любом* $k = \overline{1, K}$. *Если*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \frac{3}{2}, \tag{5}$$

то для функции Коши уравнения (2) при некоторых $N, \alpha > 0$ *справедлива оценка*

$$|C(n,m)| \leqslant N \exp\left\{ -\alpha \sum_{i=m}^{n} a(i) \right\}, \quad n \geqslant m \geqslant 0. \tag{6}$$

Постоянная $3/2$ в неравенствах (3) и (5) является точной: ее нельзя уменьшить без нарушения оценок (4) и (6), что доказывается построением соответствующих примеров. Но в этих примерах есть существенное отличие. Для дифференциальных уравнений (1) точность постоянной $3/2$ сохраняется независимо от того, является величина $h(t)$ ограниченной или нет, а для разностных уравнений (2) точность постоянной $3/2$ удается доказать, только если $h(n)$ может принимать сколь угодно большие значения. Если же подчинить $h(n)$ условию ограниченности, то оценку (5) можно усилить.

Теорема 3. [3, 4] *Пусть* $a_k(n) \geqslant 0$, $h_k(n) \geqslant 0$ *при любом* $k = \overline{1, K}$, *а* $h(n) \leqslant H$. *Если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \frac{3}{2} + \frac{1}{2(H+1)}, \qquad (7)$$

то для функции Коши уравнения (2) при некоторых N, $\alpha > 0$ *справедлива оценка (6).*

Дальнейшее усиление оценки (7) возможно, если рассматривать «полуавтономные» уравнения вида (2), т. е. такие, в которых $a_k(n) \equiv a_k \geqslant 0$. Обозначим $a = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k$,

$$\omega(H) = \begin{cases} \dfrac{12(H+1)}{5H+3+\sqrt{9H^2+6H+9}}, & H \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3), \\ \dfrac{3}{2}\left(1+\dfrac{1}{2H+1}\right), & H \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3), \\ \dfrac{12(H+1)}{5H+2+\sqrt{9H^2+12H+12}}, & H \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3). \end{cases}$$

Все три ветви функции ω асимптотически эквивалентны функции $\dfrac{3}{2}\left(1+\dfrac{1}{2H+1}\right)$.

Теорема 4. [5] *Если* $0 < (H+1)a < \omega(H)$, *то уравнение (2) экспоненциально устойчиво.*

Постоянные, определяющие области устойчивости в теоремах 3 и 4, также являются точными. Заметим, что для уравнения (1) сужение класса уравнений до полуавтономных сохраняет постоянную $3/2$ и ее неулучшаемость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание FSNM-2020-0028.

Литература

1. Малыгина В. В. *Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом* // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 10. С. 1716–1723.

2. Куликов А. Ю., Малыгина В. В. *Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями* // Известия вузов. Математика. 2008. № 3. С. 18–26.

3. Yu J. S. *Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay* // Comp. Math. Appl. 1998. V. 36. № 10–12. P. 203–210.

4. Куликов А. Ю. *Устойчивость линейного неавтономного разностного уравнения с ограниченными запаздываниями* // Известия вузов. Математика. 2010. № 11. С. 22–30.

5. Куликов А. Ю., Малыгина В. В. *Об устойчивости полуавтономных разностных уравнений* // Известия вузов. Математика. 2011. № 5. С. 25–34.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И.И. Матвеева

Рассматриваются некоторые классы систем неавтономных уравнений с запаздыванием, при этом запаздывание может быть неограниченным. Используя функционалы Ляпунова–Красовского специального вида, установлены оценки решений этих систем на правой полуоси. Полученные оценки позволяют сделать вывод об устойчивости