конечным спектром и с сосредоточенными и распределенными запаздываниями. При этом спектр такой системы можно выбрать заранее. Другой вид наблюдателя также описывается системой запаздывающего типа с конечным спектром, но без распределенных запаздываний. Однако спектр этой системы выбрать заранее невозможно.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция–2025».

Литература

1. Luenberger D. G. *An Introduction to Observers* // IEEE Trans. Automat. Contr. 1971. V. AC-16. № 6. P. 596–602.

2. Pourboghrat F. *Exact state-variable reconstruction of delay systems* // Internat. J. Control. 1986. V. 44. № 3. P. 867–877.

3. Метельский А. В., Хартовский В. Е. *Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа* // Автоматика и телемех. 2019. № 12. С. 80–102.

4. Метельский А. В., Хартовский В. Е. *О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285.

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧАХ С НЕФИКСИРОВАННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРОЦЕССА

Д.Ю. Прудникова

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$x(t_1) = x_1, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} (1 + x^T Q(t)x + u^T P(t)u)\,dt \to \min, \tag{2}$$

где μ – малый (по модулю) параметр, t_0 – заданный начальный момент времени, t_1 – нефиксированный конечный момент времени, x – n-вектор, $f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant t_0$, – нелинейная вектор-функция, $Q(t)$ – неотрицательно-определенная симметрическая матрица, $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \geqslant t_0$.

Предположение 1. *Элементы матриц* $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant t_0$, *принадлежат классу* $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in \left[t_0, t_1^{(N)}(\mu)\right]$, назовем *асимптотически субоптимальным управлением* N*-го порядка* ($N = 0, 1, 2, \ldots$) *в задаче* (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества $J(u)$ от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор–функцию $u^{(N)}(x,t,\mu)$ назовем *асимптотически субоптимальной обратной связью* N*-го порядка*, если для любого начального состояния (x_0, t_0), $t_0 < t_1$, имеет место $u^{(N)}(x_0,t_0,\mu) = u^{(N)}(t_0,\mu)$, где $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1), (2).

В [1] предложен алгоритм построения асимптотических приближений произвольного порядка к программному оптимальному управлению и оптимальной обратной связи в решении рассмотренной задачи (1), (2). Методика состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных, которые в силу принципа максимума соответствуют оптимальному управлению.

Целью работы является исследование поведения асимптотически субоптимальной обратной связи для данной задачи.

Следуя алгоритму, изложенному в [2], вычисления при построении асимптотических приближений начинаются с решения базовой задачи, которая получается из исходной при $\mu = 0$:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

$$x(t_1) = x_1, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (1 + x^T Q(t)x + u^T P(t)u)\, dt \to \min. \tag{4}$$

Предположение 2. *Динамическая система в рассмотренной базовой задаче является вполне управляемой* [3].

После решения базовой задачи формируется матрица

$$I_0 = \begin{pmatrix} F_{12}(t_1^0, t_0) & \dot{x}^0(t_1^0) \\ 2\big(F_{22}(t_1^0, t_0)B(t_1^0)u^0(t_1^0)\big)^T & \dfrac{d}{dt_1}\big(u^{0T}(t_1^0)P(t_1^0)u^0(t_1^0)\big) \end{pmatrix},$$

где $F_{12}(t_1^0, t_0)$, $F_{22}(t_1^0, t_0)$ – блоки матрицы $F(t)$, $t \in T^0$, которая является решением начальной задачи

$$\dot{F} = \overline{A}(t)F, \quad F(t_0) = E_{2n},$$

в которой

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)P^{-1}(t)B^T(t) \\ Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix}.$$

Предположение 3. *Выполнено условие* $\det I_0 \neq 0$.

Построить асимптотически субоптимальные управления типа обратной связи в явном виде не удаётся из-за нелинейности полученных систем, однако для конкретных задач иногда это сделать возможно. Как известно, классическая обратная связь при отсутствии возмущений полностью совпадает с программным управлением. При применении метода малого параметра строятся асимптотические приближения к программному оптимальному управлению и оптимальной обратной связи.

Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x_1} = \mu x_2 x_3 + u_1, \quad \dot{x_2} = \mu x_1 x_3 + u_2, \quad \dot{x_3} = -2\mu x_1 x_2 + u_3,$$

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 3, \quad x_3(0) = 1,$$

$$x_1(t_1) = 0, \quad x_2(t_1) = 0, \quad x_3(t_1) = 0,$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} (1 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 4{u_1}^2 + 4{u_2}^2 + 4{u_3}^2)\, dt \to \min.$$

Найдем асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка, которая принимает следующий вид

$$\overline{u}^{(0)}(x,t) = -\frac{\exp\big(t_1^0(x,t)\big) + \exp(t)}{2(\exp\big(t_1^0(x,t)\big) - \exp(t))}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad t \in \big[t_0, t_1^0(x,t)\big],$$

где $t_1^0(x,t) = t - 2\ln\Bigg(\Big(2x_1^2 - 2\big((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)\big)^{1/2} + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 1\Big)^{1/2}\Bigg)$.

Во всех примерах, где удалось построить асимптотически субоптимальную обратную связь оказалось, что даже применение асимптотически субоптимальных обратных связей нулевого порядка приводит к тому, что невязки в системе становятся равны нулю. Поэтому зачастую нет необходимости использовать асимптотические приближения первого порядка к оптимальной обратной связи.

Литература

1. Калинин А. И. *Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем.* Минск: Экоперспектива, 2000.

2. Калинин А. И., Лавринович Л. И. *Применение метода возмущений к задаче оптимизации переходного процесса в квазилинейной динамической системе* // Доклады НАН Беларуси. 2022. Т. 66. № 1. С. 21–25.

3. Красовский Н. Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

О РАСПОЛОЖЕНИИ НУЛЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т.Л. Сабатулина

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием

$$\dot{x}(t) + ax(t) + k\int\limits_{t-h}^{t} x(s)\,ds = f(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}_+$, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ локально суммируема.

Следуя [1, с. 9-10], назовём *решением* уравнения (1) локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду. При отрицательных значениях аргумента полагаем, что функция x доопределена суммируемой начальной функцией.

Характеристическая функция уравнения (1) имеет вид

$$g(p) = p + a + k\frac{1 - e^{-ph}}{p}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

В силу [2], расположение нулей функции g на комплексной плоскости напрямую влияет на асимптотические свойства решений уравнения (1). В частности (см. [3, с. 102]), для того чтобы уравнение (1) было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все нули его характеристической функции лежали слева от мнимой оси.

Одним из наиболее эффективных методов исследования асимптотических свойств решений автономных уравнений является метод D-разбиений [4]. Поверхность D-разбиения определяется следующим образом:

$$\operatorname{Re} kh^2 = \frac{y}{2}\Bigl(y - ah\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\Bigr), \quad \operatorname{Im} kh^2 = -\frac{y}{2}\Bigl(y\operatorname{ctg}\frac{y}{2} + ah\Bigr), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Она содержит три независимых параметра и имеет довольно сложную структуру.

В случаях $a = 0$, $k \in \mathbb{C}$ и $a, k \in \mathbb{R}$ найдены не только области экспоненциальной устойчивости, но и во всех множествах D-разбиения определено число нулей функции g, лежащих справа от мнимой оси (см. рис. 1).