системой дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P(t) = k\Big(S(t)+W(t)\Big) - ke^{-\varepsilon\tau_1}\Big(S(t-\tau_1)+W(t-\tau_1)\Big) - \varepsilon P(t), \\ \dfrac{d}{dt}S(t) = ke^{-\varepsilon\tau_1}\Big(S(t-\tau_1)+W(t-\tau_1)\Big) - S(t)\Big(\lambda I(t) + \delta I(t-\tau_2) + \varepsilon S(t)\Big), \\ \dfrac{d}{dt}I(t) = I(t)\Big(\lambda S(t) - (z+\sigma) - \delta\phi I(t-\tau_2)\Big), \\ \dfrac{d}{dt}R(t) = \sigma I(t) + \delta\phi I(t) I(t-\tau_2) - \varepsilon R(t), \\ \dfrac{d}{dt}W(t) = \delta S(t) I(t-\tau_2) - \varepsilon W(t). \end{cases}$$

Здесь $P(t)$ – численность незрелых клеток, $S(t)$ – численность восприимчивых клеток, $I(t)$ – численность инфицированных клеток, $R(t)$ – численность восстановленных клеток, $W(t)$ – численность невосприимчивых клеток. Параметр запаздывания $\tau_1 \geqslant 0$ отвечает за время созревания клетки, параметр запаздывания $\tau_2 \geqslant 0$ – за время задержки реакции иммунной системы на заражение вирусами.

В работе изучается асимптотическая устойчивость двух положений равновесия, соответствующих состоянию системы в случае заражения и состоянию системы в случае выздоровления. Установлены оценки, характеризующие скорости стабилизации решений к положениям равновесия на бесконечности. Получены оценки для множеств притяжения данных положений равновесия. Все величины, присутствующие в оценках, выражены в явном виде через коэффициенты системы. При получении результатов использовались различные функционалы Ляпунова–Красовского [2].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Neofytou G., Kyrychko Y. N., Blyuss K. B. *Time-delayed model of immune response in plants* // Journal of Theoretical Biology. 2016. V. 389. P. 28–39.

2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Е. Хартовский

Объект исследования – линейная автономная вполне регулярная дифференциально-алгебраическая система с последействием Σ:

$$\frac{d}{dt}\left(Dx(t)\right) = \sum_{i=0}^{m}\left(A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih)\right), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \eta(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0], \tag{2}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t - ih), \quad t > 0, \tag{3}$$

где $x(t)$ – решение уравнения (1), $u(t)$ – кусочно-непрерывное управление, y – наблюдаемый выход; $h = \text{const} > 0$, D, $A_i, \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$. Считаем, что начальная функция $\eta \in \mathbf{PC}_D$. Здесь для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ запись $\mathbf{PC}_A$ обозначает множество кусочно-непрерывных функций $\eta : [-mh, 0] \to \mathbb{R}^n$ таких, что функция $A\eta$ непрерывна.

Обозначим $\operatorname{rank} D = n_1$, $n_2 = n - n_1$. Систему Σ назовем *вполне регулярной*, если $\deg |pD - A_0| = n_1$.

Определение 1. Начальную функцию $\eta \in \mathbf{PC}_D$ в формулах (2) назовем *полностью* 0*-управляемой*, если существуют момент времени $t_1 > mh$ и кусочно-непрерывное управление $u(t), t > 0$, такие, что

$$x(t) \equiv 0, \quad t > t_1, \tag{4}$$

и $u(t) \equiv 0$ при $t > t_1 - mh$.

Если полностью 0-управляемы все начальные функции $\eta \in \mathbf{PC}_D$, то систему (1) назовем *полностью* 0*-управляемой.*

Определение 2. Начальную функцию $\eta \in \mathbf{PC}_D$ в формулах (2) будем называть 0*-управляемой*, если существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t), t > 0$, такие, что имеет место тождество (4). Если 0-управляемы все функции $\eta \in \mathbf{PC}_D$, то систему Σ назовем 0-управляемой.

Определение 3. Систему (1) ($u = 0$) назовем *финально наблюдаемой в направлении* $\rho \in \mathbf{PC}_D$, если найдутся такие момент времени $t_0 > mh$ и кусочно-непрерывная функция $v(t)$, $t \in [mh, t_0)$, что для любого решения уравнения (1) выполняется соотношение

$$\int_{mh}^{t_0} v'(t) y^1(t)\, dt = \rho'(0) Q x(t_0) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0 - ih}^{t_0} \rho'(t_0 - ih - t) L_i x(t)\, dt.$$

Если система (1) финально наблюдаема в любом направлении $\rho \in \mathbf{PC}_D$, то систему (1) назовем *полностью финально наблюдаемой.*

Обозначим: $W(p, \lambda) = pD - \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i$, $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i$, $C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i$.

Пусть $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_2\times n}$, $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n\times n_2}$ – матрицы фундаментальных систем решений алгебраических систем $\gamma_1 D = 0$ и $D\gamma_2 = 0$ соответственно (относительно неизвестных γ_i, $i = 1, 2$).

Теорема 1. *Для того чтобы система (1) была полностью* 0*-управляема необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:*

$$1) \operatorname{rank}\bigl[W(p, e^{-ph}),\, B(e^{-ph})\bigr] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2) \operatorname{rank}\bigl[\Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2,\, \Gamma_1 B(\lambda)\bigr] = n_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2. *Для того чтобы система (1) была полностью* 0*-управляема необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:*

$$1) \operatorname{rank}\bigl[W(p, e^{-ph}),\, B(e^{-ph}), G(e^{-ph})\bigr] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2) \operatorname{rank}\bigl[\Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2,\, \Gamma_1 B(\lambda), G(\lambda)\bigr] = n_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

где $G(\lambda)$ *– некоторая полиномиальная матрица.*

Теорема 3. *Для того чтобы система (1) была полностью финально наблюдаемой необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:*

$$1)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2)\,\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2, \\ C(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Следствие 1. *Для того чтобы существовали момент времени* t_0, *матричная функция* $V(t,\tau)$ *и полиномиальная матрица* $P(\lambda)$ *такие, что решение системы (1) представимо в виде*

$$x(t) = \int\limits_{mh}^{t_0} V(t,\tau)y(\tau)\,d\tau + P(\lambda_h)y(t), \quad t \in (t_0 - mh, t_0],$$

$$Dx(t_0 - mh) = D\int\limits_{mh}^{t_0} V(t_0 - mh,\tau)y^1(\tau)\,d\tau + QP(\lambda_h)y^1(t_0 - mh),$$

необходимо и достаточно выполнения условий теоремы 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция–2025».

О РАВНОМЕРНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

О.Б. Цехан

Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1]$ линейную нестационарную систему наблюдения

$$\Sigma_{A,c}: \quad \begin{array}{ll} \dot{x}(t) = A\,(t)\,x(t), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \\ y(t) = c\,(t)\,x(t), & v \in \mathbb{R}, \quad t \in T, \\ x(t_0) = x_0, & \end{array} \tag{1}$$

где $(n \times n)$-матрица $A(t)$ и n-вектор-строка $c(t)$ непрерывны на T.

Для системы (1) класса $n{-}1$ [1] определим n-вектор-строки $s_{(A,c),j}(t)$, $j = \overline{1, n-1}$:

$$s_{(A,c),j}(t) = s_{(A,c),j-1}(t)A(t) + \dot{s}_{(A,c),j-1}(t), \quad s_{(A,c),0}(t) = c(t)$$

и составим из них $(n \times n)$-матрицу наблюдаемости [1]

$$S_{A,c}(t) = \begin{pmatrix} s_{(A,c),0}(t) \\ s_{(A,c),1}(t) \\ \dots\dots \\ s_{(A,c),n-1}(t) \end{pmatrix} \quad (t \in T). \tag{2}$$

Для выходной функции $y(t)$ системы (1) класса $n-1$ верны равенства

$$y^{(j)}(t) = s_{(A,c),j}(t)x(t) \quad (j = 0, 1, \dots, n-1). \tag{3}$$