

где $G(\lambda)$ – некоторая полиномиальная матрица.

Теорема 3. Для того чтобы система (1) была полностью финально наблюдаемой необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:

$$1) \operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2) \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda) \Gamma_2 \\ C(\lambda) \Gamma_2 \end{bmatrix} = n_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Следствие 1. Для того чтобы существовали момент времени t_0 , матричная функция $V(t, \tau)$ и полиномиальная матрица $P(\lambda)$ такие, что решение системы (1) представимо в виде

$$x(t) = \int_{mh}^{t_0} V(t, \tau) y(\tau) d\tau + P(\lambda_h) y(t), \quad t \in (t_0 - mh, t_0],$$

$$Dx(t_0 - mh) = D \int_{mh}^{t_0} V(t_0 - mh, \tau) y^1(\tau) d\tau + QP(\lambda_h) y^1(t_0 - mh),$$

необходимо и достаточно выполнения условий теоремы 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

О РАВНОМЕРНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

О.Б. Цехан

Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1]$ линейную нестационарную систему наблюдения

$$\Sigma_{A,c}: \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \\ y(t) = c(t)x(t), & v \in \mathbb{R}, \quad t \in T, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $(n \times n)$ -матрица $A(t)$ и n -вектор-строка $c(t)$ непрерывны на T .

Для системы (1) класса $n-1$ [1] определим n -вектор-строки $s_{(A,c),j}(t)$, $j = \overline{1, n-1}$:

$$s_{(A,c),j}(t) = s_{(A,c),j-1}(t)A(t) + \dot{s}_{(A,c),j-1}(t), \quad s_{(A,c),0}(t) = c(t)$$

и составим из них $(n \times n)$ -матрицу наблюдаемости [1]

$$S_{A,c}(t) = \begin{pmatrix} s_{(A,c),0}(t) \\ s_{(A,c),1}(t) \\ \dots \\ s_{(A,c),n-1}(t) \end{pmatrix} \quad (t \in T). \quad (2)$$

Для выходной функции $y(t)$ системы (1) класса $n-1$ верны равенства

$$y^{(j)}(t) = s_{(A,c),j}(t)x(t) \quad (j = 0, 1, \dots, n-1). \quad (3)$$

Определим n -вектор-столбец $Y(t) = (y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))'$, где $'$ – символ транспонирования. Тогда равенства (3) с учетом (2) можно представить в виде

$$Y(t) = S_{A,c}(t)x(t). \quad (4)$$

Пусть $k \leq n$, $G \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $G \neq 0$. Следуя [1,2], введем

Определение. Систему (1) класса $n - 1$ назовем *равномерно относительно G -наблюдаемой на отрезке T* , если при любом $x_0 \in \mathbb{R}^n$ отображение $Gx(t) \rightarrow y(t)$ инъективно для каждого $t \in T$.

Свойство равномерной относительной G -наблюдаемости равносильно тому, что по известным $A(t)$, $c(t)$ ($t \in T$), G при каждом $t \in T$ значения k линейных комбинаций $Gx(t)$ координат состояния $x(t)$ системы (1) восстанавливаются однозначно по известному $Y(t)$.

Лемма. Пусть даны $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. При любом заданном $Y, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, проекция Gx любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего матричному уравнению $Y = Sx$, на k направлений, заданных вектор-строками матрицы G , определяется однозначно по известному Y .

2. $Sg \neq 0, \forall g \in \mathbb{R}^n : \|Gg\| \neq 0$.

3. Справедливо равенство

$$\text{rank } S = \text{rank} \begin{bmatrix} G \\ S \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Доказательство. Докажем импликацию $1 \Rightarrow 2$. Пусть существует линейный оператор $Z \in \mathbb{R}^{k \times n}$ такой, что

$$ZY = Gx, \forall x \in \mathbb{R}^n : Y = Sx, \quad (6)$$

но тем не менее для некоторого $g \in \mathbb{R}^n$ такого что $\|Gg\| \neq 0$, верно $Sg = 0$. Тогда $ZSg = 0$, откуда с учетом (6) следует $\|Gg\| = 0$. Полученное противоречие доказывает $1 \Rightarrow 2$.

Докажем $2 \Rightarrow 1$. Пусть верно 2. Если $Sg = 0$ возможно только для $g = 0$, то $\det S \neq 0$ и уравнение $Y = Sx$ однозначно разрешимо: $x = S^{-1}Y$. В противном случае существует $g \in \mathbb{R}^n$, $g \neq 0$, такой, что $Sg = 0$, и для любого такого g согласно утверждению 2 верно $Gg = 0$, а значит, любой правый делитель нуля (в том числе, максимального ранга) [3] матрицы S является правым делителем нуля и для матрицы G . Значит [4], матричное уравнение $ZS = G$ разрешимо относительно $Z \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Тогда проекция Gx определяется из $Y = Sx$ с помощью действия оператора $Z: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times n}$ по правилу $Gx = ZY$. При этом восстановление однозначно, так как если $ZY^1 = ZY^2$, то $ZSx^1 = ZSx^2$, и значит, $Gx^1 = Gx^2$.

Докажем эквивалентность $2 \Leftrightarrow 3$. Пусть $Sg \neq 0, \forall \|Gg\| \neq 0$, но не выполнено (5). Тогда существует $g_0 \neq 0$ такой, что $\|Gg_0\| \neq 0$ и $Sg_0 = 0$, что противоречит 2. Обратно, из (5) вытекает, что существует ненулевая $n \times n$ матрица Z такая, что $G = ZS$. Поэтому $\forall g \in \mathbb{R}^n, \|Gg\| \neq 0$, верно $\|ZSg\| \neq 0$, а значит, $Sg \neq 0$, что и завершает доказательство леммы.

Теорема. Система (1) класса $n - 1$ равномерно относительно G -наблюдаема на T тогда и только тогда, когда $\text{rank } S(t) = \text{rank} \begin{bmatrix} G \\ S(t) \end{bmatrix}$ для любого $t \in T$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что из определения равномерной относительной G -наблюдаемости системы (1) и представления (4) вытекает, что система (1)

равномерно относительно G -наблюдаема на отрезке T тогда и только тогда, когда для любого $t \in T$ однозначно определяется проекция $Gx(t)$ вектора $x(t)$, удовлетворяющего матричному уравнению (4), на k направлений, заданных вектор-строками матрицы G . Далее справедливость утверждения следует из эквивалентности положений 1 и 3 Леммы.

Замечание 1. Для стационарных систем при $k = n$ определение равномерной относительной G -наблюдаемости совпадает с определением относительной наблюдаемости из [2], а критерий из теоремы – с критерием (1.3) из [2].

Замечание 2. Из равномерной наблюдаемости следует равномерно относительная G -наблюдаемость при любой матрице G подходящей размерности. Обратное в общем случае не верно (см. пример).

Замечание 3. Из доказательства теоремы следует способ определения проекции $Gx(t)$ по известному $Y(t)$ для системы класса $n - 1$:

- 1) по заданным $A(t), c(t), t \in T$, формируем матрицу наблюдаемости (2);
- 2) решаем уравнение $Z(t)S(t) = G$ относительно $Z(t)$;
- 3) по известному $Y(t)$ вычисляем проекцию $Gx(t)$ по формуле $Gx(t) = Z(t)Y(t)$.

Пример. Для системы (1) с параметрами

$$n = 3, \quad m = 1, \quad C(t) = (t \ t \ 0), \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -t \\ 1 & 0 & t \\ |t| & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица наблюдаемости (2) имеет вид

$$S(t) = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 1+t & 1+t & 0 \\ 2+t & 2+t & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\text{rank } S(t) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$, то система (1) не является равномерно наблюдаемой [1] ни на каком интервале из \mathbb{R} . При $k = 1$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ она равномерно относительно G -наблюдаема на любом интервале $T \subset \mathbb{R}$, при этом оператор $Z(t)$ может быть выбран в виде $Z(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+t} & 0 \end{pmatrix}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ "Конвергенция-2025", задание 1.2.04).

Литература

1. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем* // Автоматика и телемеханика. 1998. № 7. С. 3–13.
2. Габасов Р., Жевняк Р. М., Кириллова Ф. М., Копейкина Т. Б. *Относительная наблюдаемость линейных систем. I. Обыкновенные системы* // Автоматика и телемеханика. 1972. Вып. 8. С. 5–15.
3. Буков В. Н., Рябченко В. Н., Косьянчук В. В., Зыбин Е. Ю. *Решение линейных матричных уравнений методом канонизации* // Вестник Киевского университета. Сер. Физико-математические науки. Вып. 1. 2002. С. 19–28.
4. Буков В. Н. *Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем*. Калуга: Изд-во научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006.