ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

К.М. Чудинов

Определение 1. Будем говорить, что непрерывная функция, заданная на полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty)$, *осциллирует*, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Определение 2. Будем называть дифференциальное уравнение *осциллирующим*, если все его решения осциллируют.

Как известно [1], автономное линейное дифференциальное уравнение с запаздыванием $\dot{x}(t) + ax(t-r) = 0$ является осциллирующим, если и только если $ar > 1/e$. Первые достаточные условия осциллируемости неавтономного уравнения были получены А. Д. Мышкисом в середине XX в. Спустя 30 лет этот результат был усилен Р. Г. Коплатадзе и Т. А. Чантурия.

Пусть непрерывные функции a и h заданы на полуоси $\mathbb{R}_+$, при этом $h(t) \leqslant t$. Рассмотрим линейное неавтономное уравнение с одним запаздыванием

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Теорема 1. [2] *Если* $a(t) \geqslant 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = +\infty$ *и*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e, \tag{2}$$

то уравнение (1) является осциллирующим.

Случай автономного уравнения показывает, что константа $1/e$ в неравенстве (2) не может быть уменьшена. Более того, строгое неравенство не может быть заменено нестрогим.

Для автономного уравнения с несколькими запаздываниями справедлива

Теорема 2. [3] *Чтобы уравнение* $\dot{x}(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x(t-r_k) = 0$ *было осциллирующим, достаточно, чтобы* $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k r_k > 1/e$.

Рассмотрим неавтономное уравнение с несколькими запаздываниями

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t)x(h_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

где функции a_k и h_k кусочно-непрерывны и $h_k(t) \leqslant t$, $k = \overline{1,m}$.

Пусть $a_k(t) \geqslant 0$ и выполнено условие $\lim\limits_{t\to\infty} h_k(t) = +\infty$, $k = \overline{1,m}$. Тогда в силу теорем 1 и 2 естественно предположить, что осциллируемость уравнения (3) обеспечивается неравенством

$$\varliminf_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{h_k(t)}^{t} a_k(s)\,ds > 1/e. \tag{4}$$

Удивительно, но несмотря на то, что после 1982 г. в литературе было сделано много попыток приблизить достаточные условия осциллируемости уравнения (3) к неравенству (4), вопрос о том, верно ли высказанное выше предположение, в явном виде поставлен не был.

Выделим следующий результат.

Теорема 3. [4] *Если* $h_k(t) = t - r_k$, *где* $r_k = \text{const} > 0$, $k = \overline{1, m}$, *и*

$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t}^{t+r_k} a_k(s)\,ds > 1/e, \tag{5}$$

то уравнение (3) является осциллирующим.

В работе [5] показано, что если промежутки интегрирования $[t, t+r_k]$ в условии (5) заменить промежутками $[t - r_k, t]$, то в случае $m > 1$ теорема 3 обратится в неверное утверждение. Следствием этого является опровержение сформулированного выше предположения.

Обобщить теорему 1 на случай уравнения (3) удалось следующим образом.

Для $k = \overline{1, m}$ определим семейство множеств $E_k(t) = \{s \geqslant t : h_k(s) < t\}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Расширим класс уравнений (3). Пусть функции a_k локально суммируемы, функции h_k измеримы и $h_k(t) \leqslant t$ для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$, $k = \overline{1, m}$, а решение уравнения (3) определим в классе локально абсолютно непрерывных функций.

Пусть $a_k(t) \geqslant 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $h_k(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, $k = \overline{1, m}$.

Теорема 4. [6] *Если*

$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k(t)} a_k(s)\,ds > 1/e,$$

то уравнение (3) является осциллирующим.

Теорема 4 существенно усиливает теорему 1 даже в случае $m = 1$.

Следствие. *Если функции* h_k, $k = \overline{1, m}$, *непрерывны и строго возрастают к бесконечности на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *и при этом*

$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t}^{h_k^{-1}(t)} a_k(s)\,ds > 1/e,$$

то уравнение (3) является осциллирующим.

Заметим, что изложенный подход к обобщению теоремы Коплатадзе–Чантурия на случай уравнения (3) не единственный. Существует идейно идущий от работы [7] итерационный метод, состоящий в уточнении левой части неравенства. Упомянем также теорему Ханта–Йорка [8], предлагающую не интегральное, а «точечное» неравенство.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание FSNM-2020-0028.

Литература

1. Мышкис А. Д. *О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом* // Матем. сб. 1951. Т. 28(70). № 3. С. 641–658.

2. Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А. *О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом* // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1463–1465.

3. Ladas G., Stavroulakis I. P. *Oscillations caused by several retarded and advanced arguments* // J. Differential Equations. 1982. V. 44. P. 134–152.

4. Li B. *Oscillation of first order delay differential equations* // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. № 12. P. 3729–3737.

5. Чудинов К. М. *О точных достаточных условиях осцилляции решений линейных дифференциальных и разностных уравнений первого порядка с последействием* // Изв. вузов. Матем. 2018. № 5. С. 93–98.

6. Чудинов К. М. *Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и обобщении теоремы Коплатадзе–Чантурия* // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61. № 1. С. 224–233.

7. Koplatadze R., Kvinikadze G. *On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations* // Georgian Math. J. 1994. V. 1. № 6. P. 675–685.

8. Hunt B. R., Yorke J. A. *When all solutions of* $x' = -\sum q_i(t)x(t-T_i(t))$ *oscillate* // J. Differential Equations. 1984. V. 53. № 2. P. 139–145.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. Ыскак

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида

$$\frac{d}{dt}(y(t)+D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,\, t-s)y(s)\,ds, \tag{1}$$

где $D(t)$ – матрицы размера $n\times n$ с непрерывно дифференцируемыми, T-периодическими элементами, $A(t)$ – матрицы размера $n\times n$ с непрерывными, T-периодическими элементами, $B(t,s)$ – матрицы размера $n\times n$ с непрерывными, T-периодическими по первой переменной элементами, т.е.

$$D(t)\equiv D(t+T), \quad A(t)\equiv A(t+T), \quad B(t,s)\equiv B(t+T,s).$$

Цель работы состоит в исследовании экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1) и получении оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности.

При исследовании устойчивости нулевого решения системы (1) используется функционал Ляпунова–Красовского, предложенный в [2]:

$$v(t,y) = \big\langle H(t)\big(y(t)+D(t)y(t-\tau)\big), \big(y(t)+D(t)y(t-\tau)\big)\big\rangle +$$
$$+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\big\langle K(t-s)y(s), y(s)\big\rangle\, ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t}\big\langle M(t-s,s)y(s), y(s)\big\rangle\, ds.$$

Данный функционал является аналогом функционала Ляпунова–Красовского из [1].

Введем обозначения:

$$R(t) = \frac{1}{\tau}\big(M(\tau, t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t)\big) - D^*(t)K(0)D(t),$$

$p^H_{min}(t)$ – минимальное собственное значение матрицы

$$P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t),$$

где

$$P(t) = \tau Q_{11}(t) - \tau Q_{12}(t)Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t) - \int\limits_0^{\tau} Q_{13}(t,s)Q_{33}^{-1}(s)Q_{13}^*(t,s)\,ds,$$