6. Чудинов К. М. *Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и обобщении теоремы Коплатадзе–Чантурия* // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61. № 1. С. 224–233.

7. Koplatadze R., Kvinikadze G. *On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations* // Georgian Math. J. 1994. V. 1. № 6. P. 675–685.

8. Hunt B. R., Yorke J. A. *When all solutions of* $x' = -\sum q_i(t)x(t - T_i(t))$ *oscillate* // J. Differential Equations. 1984. V. 53. № 2. P. 139–145.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. Ыскак

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)\,ds, \tag{1}$$

где $D(t)$ – матрицы размера $n\times n$ с непрерывно дифференцируемыми, T-периодическими элементами, $A(t)$ – матрицы размера $n\times n$ с непрерывными, T-периодическими элементами, $B(t,s)$ – матрицы размера $n \times n$ с непрерывными, T-периодическими по первой переменной элементами, т.е.

$$D(t) \equiv D(t+T), \quad A(t) \equiv A(t+T), \quad B(t,s) \equiv B(t+T,s).$$

Цель работы состоит в исследовании экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1) и получении оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности.

При исследовании устойчивости нулевого решения системы (1) используется функционал Ляпунова–Красовского, предложенный в [2]:

$$v(t,y) = \big\langle H(t)\big(y(t) + D(t)y(t-\tau)\big), \big(y(t) + D(t)y(t-\tau)\big)\big\rangle +$$
$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^{t} \big\langle K(t-s)y(s), y(s)\big\rangle\,ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t} \big\langle M(t-s,s)y(s), y(s)\big\rangle\,ds.$$

Данный функционал является аналогом функционала Ляпунова–Красовского из [1].

Введем обозначения:

$$R(t) = \frac{1}{\tau}\big(M(\tau, t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t)\big) - D^*(t)K(0)D(t),$$

$p^H_{min}(t)$ – минимальное собственное значение матрицы

$$P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t),$$

где

$$P(t) = \tau Q_{11}(t) - \tau Q_{12}(t)Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t) - \int\limits_0^\tau Q_{13}(t,s)Q_{33}^{-1}(s)Q_{13}^*(t,s)\,ds,$$

$$Q_{11}(t) = -\frac{1}{\tau}\Big(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + M(0,t)\Big) - K(0),$$

$$Q_{12}(t) = \frac{1}{\tau}\big(H(t)A(t) + M(0,t)\big)D(t) + K(0)D(t), \quad Q_{22}(t) = R(t),$$

$$Q_{13}(t,s) = -H(t)B(t,s), \quad Q_{33}(s) = K(s).$$

Теорема. *Пусть существуют T-периодическая гладкая матрица $H(t) = H(t)^* > 0$ и матрицы $K(s) = K^*(s) > 0$, $\frac{d}{ds}K(s) < 0$, $s \in [0,\tau]$, и $M(s,\xi) = M^*(s,\xi) > 0$, $\frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) < 0$, $s \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}$, такие, что*

$$R(t) > 0, \quad t \in [0,T], \quad \int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0,$$

где $\gamma_H(t) = \min\left\{p^H_{min}(t), k\right\}$, $k > 0$ – максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leqslant 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) + kM(s,\xi) \leqslant 0, \quad s \in [0,\tau], \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Тогда нулевое решение системы экспоненциально устойчиво.

Отметим, что помимо представленных достаточных условий экспоненциальной устойчивости получены конструктивные оценки решений системы (1), которые характеризуют экспоненциальное убывание решений на бесконечности.

Литература

1. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28.

2. Ыскак Т. *Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием* // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.

ON THE ROBUST STABILIZABILITY ANALYSIS OF THREE-TIME-SCALE LINEAR TIME-INVARIANT SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS WITH DELAY

C.A. Naligama, O.B. Tsekhan

Let $p \triangleq \frac{d}{dt}$ be the differentiation operator, $h = \text{const} > 0$, e^{-ph} be the delay operator: $e^{-ph}v(t) = v(t-h)$, $e^{-jph}v(t) = v(t-jh)$. The following Three-time-scale Singularly Perturbed Linear Time-invariant System with Multiple Commensurate Delays in the slow state variables (TSPLTISD) is considered in the matrix-operator form:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\\ \dot{z}(t)\end{bmatrix} = A\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}\right)\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix} + B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)u(t), \ x \in \mathbb{R}^{n_1}, \ y \in \mathbb{R}^{n_2}, \ z \in \mathbb{R}^{n_3}, \qquad (1)$$

with initial conditions: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $x(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0)$.