В пространстве $D'(\mathbb{R})$ семейство $w_\varepsilon(x)$ сходится тогда и только тогда, когда знаки $\operatorname{Im} a(\varepsilon)$ и $\operatorname{Im} b(\varepsilon)$ постоянны при достаточно малых ε и, в зависимости от этих знаков, обобщенным решением является одно из четырех распределений

$$W^{\pm,\pm} = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-b}\right) \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_b.$$

Возможны два вырожденных случая.

1. Если $C_2 = -\gamma C_1^2$, то $b = \infty$, $a = x_0 - \dfrac{1}{\gamma C_1}$ и, в зависимости от способа аппроксимации начальных условий, имеется два обобщенных решения

$$W^{\pm} = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a.$$

2. Если $C_2 = -\dfrac{1}{2}\gamma C_1^2$, то точки a и b совпадают на вещественной прямой. В зависимости от способа аппроксимации начальных условий существуют три обобщенных решения

$$W^{\pm} = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) \pm i\pi\frac{2}{\gamma}\delta_a,\ W = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

Таким образом, в зависимости от начальных условий второе уравнение иерархии Риккати может иметь одно, два, три или четыре обобщенных решения.

Литература

1. Грицук Е. В., Кузьмина Е. В. *Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве* // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. 2017. № 2. С. 64–72.
2. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.

О НЕКОТОРЫХ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Г.Т. Можджер

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2} + a_3yy'' + a_4y'^2 + a_5y^2y', \quad a_5 \neq 0, \tag{1}$$

где a_i, $i = \overline{1,5}$, – постоянные коэффициенты.

Упрощенным уравнением к уравнению (1) является уравнение

$$y''' = a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2},$$

которое имеет характеристический многочлен $\varphi(\lambda) = 2\lambda^2 + (a_1+1)\lambda - a_2$.

Отсюда, согласно [1], имеем, что $a_1 + 1 = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$, $a_2 = -2\lambda_1\lambda_2$, где λ_1, λ_2 – корни характеристического многочлена.

Предположим, что уравнение (1) имеет первый интеграл веса $p_1 = 2k$ вида

$$y^{2k-12}y''^4 + \sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{2n+1} A_{n,m}y^{2k+2m-n-14}y'^{2n+1-m}y''^{4-n} = K, \tag{2}$$

где $A_{n,m}$ – произвольные постоянные, K – произвольная постоянная интегрирования.

Пусть корни характеристического уравнения $\varphi(\lambda)$ будут

$$\lambda_1 = \frac{k-8}{4},\ \lambda_2 = \frac{k(2p+3)-8(2p-1)}{4(2p-1)}. \tag{3}$$

Найдем условия на коэффициенты уравнения (1), при которых оно имеет первый интеграл вида (2). Для этого продифференцируем (2) с учетом (1). Получим

$$\begin{gathered} 4a_1 + 2k - 12 + 2A_{1,1} = 0, \quad 4a_3 + A_{1,2} = 0, \\ (4-n)(a_2A_{n,m} + a_4A_{n,m-1} + a_5A_{n,m-2}) + (3-n)a_3A_{n+1,m-1} + \\ +\big((3-n)a_1 + 2k - 15 - n + 2m\big)A_{n+1,m} + (2n-m+5)A_{n+2,m} = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$n = \overline{0,3}, \quad m = \overline{1, 2n+4},$$

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0,\ j = 1, \\ 0, & \text{если } i = 0, j \neq 1; \text{ или } j \leq 0; \text{ или } i > 4; \text{ или } j > 2i+1. \end{cases}$$

Найдем случаи, когда условия (4) совместны, и в результате выделим все классы уравнений (1), которые имеют первые интегралы вида (2) при условии (3), то есть

$$a_1 = 7 - \frac{2p+1}{2p-1}k, \quad a_2 = -\frac{(k-8)(k(2p+3)-8(2p-1))}{8(2p-1)}. \tag{5}$$

В частности, если положить $p = \dfrac{5}{2}$, $a_4 = \dfrac{1}{2}a_3(k-4)$, $a_5 = 2a_3^2$, то уравнение (1) и первый интеграл (2) примут соответственно вид

$$y''' = (7 - 3k/2)\frac{y'y''}{y} - \frac{1}{4}(k-4)(k-8)\frac{y'^3}{y^2} + a_3yy'' + \frac{1}{2}a_3(k-4)y'^2 + 2a_3^2y^2y', \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{48k^4}y^{2k-16}\Big\{3k^4(2yy'' + (k-4)y'^2)^4 - 4a_3k^4(2yy'' + (k-4)y'^2)\Big(6(2yy'' + (k-4)y'^2)^2 + \\ +c(18yy'' + (5k-36)y'^2)y^4\Big)y^2y' + 4a_3^2k^3\Big(6k(2yy'' + (k-4)y'^2)^2 - \\ -c(96y^2y''^2 + 48(k-8)yy'^2y'' + (5k^2 - 96k + 384)y'^4)y^4\Big)y^4 + 32a_3^3k^3\Big(5k(2yy'' + \\ +(k-4)y'^2)y'^2 + 8c(3yy'' + (k-6)y'^2)y^4\Big)y^6y' - 16a_3^4k^2\Big(96y^2y''^2 + \\ +48(k-2)yy'^2y'' + (17k^2 - 96k + 384)y'^4 - 8c(8yy'' + (k-16)y'^2)y^4\Big)y^8 + \\ +256a_3^5k^2(12yy'' + (k-24)y'^2 - 4cy^4)y^{10}y' + 512a_3^6k(8yy'' + (k-16)y'^2 - 2cy^4)y^{12} - \\ -4096a_3^7ky^{14}y' - 4096a_3^6y^{16} + 3ck^4(4yy'' + (k-8)y'^2)(2yy'' + (k-4)y'^2)^2y^4\Big\} = K. \end{gathered} \tag{7}$$

Если положить $p = \dfrac{29}{2}$, $a_4 = \dfrac{2}{7}a_3(2k-7)$, $a_5 = \dfrac{4}{9}a_3^2$, то уравнение (1) и первый интеграл (2) примут соответственно вид

$$y''' = (7 - 15k/14)\frac{y'y''}{y} - \frac{1}{7}(k-7)(k-8)\frac{y'^3}{y^2} + a_3yy'' + \frac{2}{7}a_3(2k-7)y'^2 + \frac{4}{9}a_3^2y^2y', \tag{8}$$

$$\frac{1}{78764805k^4}y^{2k-16}\Big\{32805k^4(7yy''+2(k-7)y'^2)^4-2187a_3k^4\Big(144060y^3y''^3+$$
$$+3430(37k-252)y^2y'^2y''^2+98(379k^2-5180k+17640)yy'^4y''+(3613k^3-74284k^2+$$
$$+507640k-1152480y'^6)y'^6\Big)y^2y'-500094a_3^2k^3\Big(980y^3y''^3-210(k+28)y^2y'^2y''^2-$$
$$-30(13k^2-28k-392)yy'^4y''-(71k^3-780k^2+840k+7840)y'^6\Big)y^4+$$
$$+333396a_3^3k^3\Big(4410y^2y''^2+1260(k-14)yy'^2y''-(23k^2+2520k-17640)y'^4\Big)y^6y'+$$
$$+7779240a_3^4k^2\Big(98y^2y''^2-28(5k+14)yy'^2y''-(31k^2-280k-392)y'^4\Big)y^8-$$
$$-108909360a_3^5k^2(14yy''-(k+28)y'^2)y^{10}y'-33882912a_3^6k(14yy''-(19k+28)y'^2)y^{12}-$$
$$-474360768a_3^7ky^{14}y'+105413504a_3^8y^{16}\Big\}=K. \tag{9}$$

Таким образом, верна

Теорема. *Если для уравнения (1) выполнены соотношения (5) и имеют место условия*

$$p=\frac{5}{2},\quad a_4=\frac{1}{2}a_3(k-4),\quad a_5=2a_3^2,$$

то уравнение (6) примет вид (7).

Если же имеют место условия (5) и

$$p=\frac{29}{2},\quad a_4=\frac{2}{7}a_3(2k-7),\quad a_5=\frac{4}{9}a_3^2,$$

то уравнение (8) примет вид (9).

Литература

1. Можджер Г. Т. *Первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений высших порядков с рациональной правой частью*: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. Гродно, 2006.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.А. Мухин, В.А. Пронько, И.П. Мартынов

Если решение уравнения

$$y^2y'y'''=ay^2\left(y''\right)^2+by\left(y'\right)^2y''+c\left(y'\right)^4 \tag{1}$$

представить в виде

$$y=\alpha\left(z-z_0\right)^{-s}+...+h\left(z-z_0\right)^{r-s},\quad s\neq 0, \tag{2}$$

то решению (2) будем сопоставлять набор $(s,\alpha;-1,r_1,r_2)$. При этом s должно удовлетворять соотношению