$$\frac{1}{78764805k^4}y^{2k-16}\Big\{32805k^4(7yy''+2(k-7)y'^2)^4-2187a_3k^4\Big(144060y^3y''^3+$$
$$+3430(37k-252)y^2y'^2y''^2+98(379k^2-5180k+17640)yy'^4y''+(3613k^3-74284k^2+$$
$$+507640k-1152480y'^6)y'^6\Big)y^2y'-500094a_3^2k^3\Big(980y^3y''^3-210(k+28)y^2y'^2y''^2-$$
$$-30(13k^2-28k-392)yy'^4y''-(71k^3-780k^2+840k+7840)y'^6\Big)y^4+$$
$$+333396a_3^3k^3\Big(4410y^2y''^2+1260(k-14)yy'^2y''-(23k^2+2520k-17640)y'^4\Big)y^6y'+$$
$$+7779240a_3^4k^2\Big(98y^2y''^2-28(5k+14)yy'^2y''-(31k^2-280k-392)y'^4\Big)y^8-$$
$$-108909360a_3^5k^2(14yy''-(k+28)y'^2)y^{10}y'-33882912a_3^6k(14yy''-(19k+28)y'^2)y^{12}-$$
$$-474360768a_3^7ky^{14}y'+105413504a_3^8y^{16}\Big\}=K. \qquad (9)$$

Таким образом, верна

Теорема. *Если для уравнения (1) выполнены соотношения (5) и имеют место условия*

$$p=\frac{5}{2},\quad a_4=\frac{1}{2}a_3(k-4),\quad a_5=2a_3^2,$$

то уравнение (6) примет вид (7).

Если же имеют место условия (5) и

$$p=\frac{29}{2},\quad a_4=\frac{2}{7}a_3(2k-7),\quad a_5=\frac{4}{9}a_3^2,$$

то уравнение (8) примет вид (9).

Литература

1. Мождлжер Г. Т. *Первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений высших порядков с рациональной правой частью*: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. Гродно, 2006.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.А. Мухин, В.А. Пронько, И.П. Мартынов

Если решение уравнения

$$y^2y'y'''=ay^2\left(y''\right)^2+by\left(y'\right)^2y''+c\left(y'\right)^4 \qquad (1)$$

представить в виде

$$y=\alpha\left(z-z_0\right)^{-s}+...+h\left(z-z_0\right)^{r-s},\quad s\neq 0, \qquad (2)$$

то решению (2) будем сопоставлять набор $(s,\alpha;-1,r_1,r_2)$. При этом s должно удовлетворять соотношению

$$(a+b+c-1)\,s^2+(2a+b-3)\,s+a-2=0. \tag{3}$$

Имеет место

Лемма 1. *Если при $a\neq 0$ в уравнении (1) имеет место*

$$b=3+\frac{4}{n}-2a\left(1+\frac{1}{n}\right)^2,\quad c=(a-2)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

то уравнение (3) дает кратные значения для s:

$$(s-n)^2=0.$$

Уравнение (1) заменим системой

$$\begin{cases} y'=nuy,\\ u''=\dfrac{a(u')^2}{u}+2\,(2-a)\,uu'+(a-2)\,u^3,\ n\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{5}$$

Имеет место

Теорема 1. *Второе уравнение системы (5) имеет подвижные логарифмические особые точки.*

Следствие 1. *Уравнение (1) при условии (4) имеет общее решение с логарифмическими особенностями.*

Пусть $a=0$, тогда уравнение (1) при условии (4) примет вид

$$y^2y'''=\left(3+\frac{4}{n}\right)yy'y''-\left(1+\frac{1}{n}\right)^2(y')^3. \tag{6}$$

Лемма 2. *Уравнение (6) имеет промежуточный интеграл*

$$(y')^2=y^{2+\frac{2}{n}}\,(C_1\ln y+C_2), \tag{7}$$

где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные.

Теорема 2.

1) Если $C_1=0$ и выполняется условие $n^2=C_2\gamma^{\frac{2}{n}}$, то уравнение (7) имеет двухпараметрическое рациональное решение

$$y=\gamma\,(z-z_0)^{-n}.$$

2) Если $C_1\neq 0$, то решение уравнения (7) можно представить в виде

$$y=A\exp(2v^2),\, z-z_0=B\int e^{-\frac{2}{n}v^2}dv,$$

причем $C_2=-2C_1\ln A,\ \ A^{\frac{2}{n}}B^2C=8.$

Замечание. При $n=2$ заключение теоремы 2 согласуется с результатом из [1].

Литература

1. Яблонский А. И. *Аналитические свойства решений систем дифференциальных уравнений*: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.003. Минск, 1971.