О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ПУАНКАРЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ФУНКЦИЙ

Л.А. Хвощинская

Рассматривается система дифференциальных уравнений класса Фукса для вектор-функции $Y(z) = (y_1, y_2)$

$$\frac{dY}{dz} = Y\left(\frac{U_1}{z-a_1} + \frac{U_2}{z-a_2}\right) \tag{1}$$

с (2×2)-матрицами-вычетами U_1, U_2 и тремя особыми точками a_1, a_2, $a_3 = \infty$. Требуется указать невырожденные (2×2)-матрицы V_1, V_2, V_3, образующие группу монодромии системы (1) и обладающие следующими свойствами:

$$V_1\cdot V_2\cdot V_3 = E \quad \text{и} \quad V_k \sim \exp(2\pi i U_k), \quad k=1,2.$$

Пусть ρ_k, σ_k – характеристические числа матриц U_k, $k=1,2$, а ρ, σ – характеристические числа матрицы U_1+U_2. В работе [1] показано, что характеристические числа матриц U_k удовлетворяют неравенствам

$$|\mathrm{Re}\,(\rho_k-\sigma_k)| \leqslant 1, \quad k=1,2, \quad \text{и} \quad 0 < \mathrm{Re}\,(\sigma-\rho) \leqslant 1.$$

Тогда числа

$$\alpha_k = \exp(2\pi i\rho_k), \ \beta_k = \exp(2\pi i\sigma_k), \ k=1,2,$$
$$\alpha_3 = \exp(-2\pi i\rho), \ \beta_3 = \exp\big(2\pi i(1-\sigma)\big)$$

являются характеристическими числами матриц монодромии V_1, V_2, V_3, причем

$$\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3 = 1.$$

Обозначим $s_k = \alpha_k+\beta_k$, $d_k = \alpha_k\beta_k$, $k=1,2,3$. Установлено, что жорданова форма матрицы U_1+U_2 может быть только диагональной. При этом матрица может приводиться как к диагональной (при $\sigma-\rho\neq 1$), так и к треугольной (при $\sigma-\rho=1$) жордановой форме.

Теорема. *Пусть в уравнении (1) ρ_k, σ_k – характеристические числа матриц U_k, $k=1,2$, а ρ, σ – характеристические числа матрицы U_1+U_2, $\alpha_k=\exp(2\pi i\rho_k)$, $\beta_k=\exp(2\pi i\sigma_k)$, $k=1,2$, $\alpha_3=\exp(-2\pi i\rho)$, $\beta_3=\exp\big(2\pi i(1-\sigma)\big)$. Тогда матрицы монодромии уравнения (1) находятся по следующим формулам:*

1) если $\sigma-\rho\neq 1$, то

$$V_1 = \frac{1}{\alpha_3-\beta_3}D^{-1}\begin{pmatrix} d_1d_3s_2-\beta_3s_1 & c\,(\alpha_1\beta_3+\beta_1\alpha_3-d_1d_3s_2) \\ \dfrac{1}{c}\,(d_1d_3s_2-\alpha_1\alpha_3-\beta_1\beta_3) & \alpha_3s_1-d_1d_3s_2 \end{pmatrix}D,$$

$$V_2 = \frac{1}{\alpha_3-\beta_3}D^{-1}\begin{pmatrix} d_2d_3s_1-\beta_3s_2 & c\,(\alpha_3s_2-d_2d_3s_2-d_2\beta_1\alpha_3^2) \\ \dfrac{1}{c}\,(d_2d_3\alpha_1+d_2\beta_1\beta_3^2-\beta_3s_2) & \alpha_3s_2-d_2d_3s_1 \end{pmatrix}D;$$

2) если $\sigma-\rho=1$, то

$$V_1 = D^{-1}\begin{pmatrix} c & d_1\,(d_2\alpha_3-s_2) \\ \dfrac{(c-\alpha_1)(c-\beta_1)}{d_1\,(s_2-d_2\alpha_3)} & s_1-c \end{pmatrix}D,$$

$$V_2 = D^{-1}\begin{pmatrix} s_2 - d_2\alpha_3 c & d_2\left(d_1\alpha_3 s_2 - s_1\right) \\ \dfrac{\alpha_3 c\left(d_2\alpha_3 c - s_2\right) + 1}{s_1 - d_1\alpha_3 s_2} & d_2\alpha_3 c \end{pmatrix} D,$$

$$V_3 = (V_1V_2)^{-1},$$

где c *– произвольная постоянная,* D *– любая невырожденная* (2×2)*-матрица.*

Полученные выше формулы можно использовать при решении задачи Пуанкаре с четырьмя особыми точками, представив матрицу V_4^{-1} в виде произведения двух матриц двумя способами $V_4^{-1} = V_1(V_2V_3)$ и $V_4^{-1} = (V_1V_2)\,V_3$.

Литература

1. Khvostchinskaya L., Rogosin S. *On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions* // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018 (M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers, 2020. P. 79–112.

О СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, АССОЦИИРОВАННОЙ СО ВТОРЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

В.В. Цегельник

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$w_\alpha = -w_{\alpha-\varepsilon} - \varepsilon\frac{(2\alpha-\varepsilon)\varphi'}{2w'_{\alpha-\varepsilon} + 2\varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon\varphi}, \tag{1}$$

$$w_{\alpha-\varepsilon} = -w_\alpha + \varepsilon\frac{(2\alpha-\varepsilon)\varphi'}{2w'_\alpha - 2\varepsilon w^2_\alpha - \varepsilon\varphi} \tag{2}$$

с неизвестными функциями w_α, $w_{\alpha-\varepsilon}$ независимой переменной z, произвольным параметром α, а также параметром $\varepsilon^2 = 1$ и произвольной аналитической функцией $\varphi(z)$ $(\varphi'(z) \not\equiv 0)$.

Из системы (1), (2) при условии

$$(2\alpha-\varepsilon)\varphi' \neq 0 \tag{3}$$

следует, что

$$w'_\alpha - \varepsilon w^2_\alpha + w'_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} = 0. \tag{4}$$

Исключая из (4) при условии (3) неизвестную функцию $w_{\alpha-\varepsilon}$ относительно w_α получим уравнение

$$w''_\alpha = 2w^3_\alpha + \varphi w_\alpha + \alpha\varphi' + \frac{\varphi''}{2\varphi'}(2w'_\alpha - 2\varepsilon w^2_\alpha - \varepsilon\varphi). \tag{5}$$

Если из (4) при условии (3) исключить неизвестную функцию w_α, то относительно $w_{\alpha-\varepsilon}$ получим уравнение

$$w''_{\alpha-\varepsilon} = 2w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varphi w_{\alpha-\varepsilon} + (\alpha-\varepsilon)\varphi' + \frac{\varphi''}{2\varphi'}(2w'_{\alpha-\varepsilon} + 2\varepsilon w^2_{\alpha-\varepsilon} + \varepsilon\varphi). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть* $w_\alpha = w(z,\alpha,\varepsilon)$ *– решение уравнения (5) при фиксированных значениях* α, $\varepsilon^2 = 1$ *и условии (3). Тогда функция* $w_{\alpha-\varepsilon} = w(z,\alpha-\varepsilon)$, *определяемая (2), является решением уравнения (6).*