систем на графах. При этом возникает вопрос, во-первых, выбор условий согласований во внутренних вершинах графа и, во-вторых, определение условий закреплений в граничных вершинах графа.

Для исследования собственных частот колебаний конструкций, состоящих из множества стержней, возникают задачи на собственные значения для систем указанного выше вида на геометрических графах.

В докладе обсуждаются теоремы о локализации спектров указанных задач.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОГО КРАЕВОГО УСЛОВИЯ В СТЕРЖНЕВОМ ТЕЧЕНИИ

С.С. Каянович

Рассмотрим задачу (1)–(6) [1]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_{iT},\ i = 1,2, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (x,t) \in \Omega'_T, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T, \tag{3}$$

$$u_1\big|_{t=0} = \bar{b}(x),\ x \in \bar{\Omega}, \quad u_1\Big|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s,t),\ (s,t) \in \tilde{S}_T, \quad u_2\Big|_{S_{\bigcup T}} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\bigg|_{S'_{1T}} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\bigg|_{S'_{1T}}, \quad u_2|_{S'_{2T}} = -\int_{H}^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1,z,t)}{\partial x_1}\,dz, \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\big|_{\tilde{S}_T} = \zeta(s)\sum_{j=1}^{2}\omega_j(s,t)\cos\alpha_j, \ \ \omega_i = \nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}, \ i = 1,2, \ (s,t) \in \tilde{S}_T, \tag{6}$$

где $\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\big|_{\tilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ внешней нормали к поверхности $\tilde{S}_T$. Все обозначения в (1)–(6) содержатся в [1]. В работах [1, 2] доказано, что система уравнений стержневого течения имеет единственное решение при любом $t = t_m = m\tau$ (при достаточно малом τ), причём $u_{1,m} \in C_{l,\alpha}\left(\bar{\tilde{\Omega}}_m\right)$, $p \in C_{l-1,\alpha}\left(\bar{\tilde{\Omega}}_m\right)$. Встаёт вопрос о численном нахождении решения. Для этого будет применён метод конечных разностей, при котором задача (1)–(6) заменяется разностной задачей, её аппроксимирующей. Порядок точности разностной задачи совпадает с порядком аппроксимации [3] (обозначения теории разностных схем см. в [3]).

Разностная схема для задачи (1), (4) на равномерной по шагам h, τ сетке рассматривалась в [4]. Поэтому сразу переходим к уравнению (3) и условиям (6). Уравнение (3) содержит частные производные, аналогичные производным из (1), поэтому их аппроксимация будет аналогичной. Остановимся на описании в разностном виде условий (6). Учитывая нулевые условия для функций u_1 и u_2 на частях границы

$$l_1 \cup l_2 \colon \Big[\frac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \frac{\delta}{2}; x_2 = 0 \cup x_2 = H\Big],$$

взятых при значении $t = t_m$, а также определение срезающей функции $\zeta(x)$, замечаем, что левее прямой $x_1 = \dfrac{\delta}{2}$ и правее прямой $x_1 = L - \dfrac{\delta}{2}$ условия для нормальной производной $\dfrac{\partial p}{\partial \bar{n}}|_{l_i}$, $i = 1, 2$, обращаются в нуль (см. [1]). На частях же $l_1 \cup l_2$ ненулевым остаётся только слагаемое $\nu \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$. При этом, например, на l_1 условие

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\right|_{l_1} = -\left.\frac{\partial p}{\partial x_2}\right|_{l_1} = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$$

можно взять в виде $\left.\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\right|_{l_1} = 0$ (см. [5], а также [6], гл. IV, § 39).

Займёмся аппроксимацией краевого условия $\left.\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\right|_{l_1} = 0$. Далее применяем обозначения $p(x_1, x_2, t_m) = p(x_2)$, т.е. зависимость от переменных x_1 и t явно не указываем, $\left.\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\right|_{l_1} = p'_{x_2}$, для разностной производной используем обозначение p_{x_2} (штрих отсутствует). Производную $p'_{x_2}(0)$ заменяем правой разностной производной $y_{x_2}(0) = \dfrac{y(h) - y(0)}{h}$ и краевое условие при $x_2 = 0$ напишем в виде $y_{x_2}(0) = 0$ (y есть сеточная функция для функции p). Для погрешности $z = y - p$ получаем $z_{x_2}(0) = y_{x_2}(0) - p_{x_2}(0)$. Разлагая $p(x_2)$ в окрестности узла $x_2 = 0$ по формуле Тейлора: $p(h) = p(0) + hp'(0) + 0,5h^2 p''(0) + O(h^3)$, находим

$$p_{x_2}(0) = p'(0) + 0,5hp''(0) + O(h^2) \tag{7}$$

(производные функции p есть производные по переменной x_2). Видим, что погрешность аппроксимации для краевого условия есть $O(h)$. Подправим условие $y_{x_2}(0) = 0$ так, чтобы порядок аппроксимации составлял $O(h^2)$, используя тот факт, что $p(x_2)$ есть решение исходной задачи (3), (6) (см. [3]). Выразим из уравнения (3) $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(0) = p''_{x_2 x_2}(0)$:

$$p''_{x_2 x_2}(0) = -p''_{x_1 x_1}(0).$$

Подставляя это $p''_{x_2 x_2}(0)$ в (7), получим

$$p_{x_2}(0) + 0,5hp''_{x_1 x_1}(0) = p'(0) + O(h^2), \tag{8}$$

т.е. выражение в левой части (8) аппроксимирует $p'(x_2)$ в точке $x_2 = 0$ на решении (3) со 2-м порядком. Подправив краевое условие, получим 2-ой порядок аппроксимации.

Для дальнейшего заметим, что непосредственно к стенке $x_2 = 0$ прилегает тонкая прослойка жидкости, в которой средняя скорость меняется по линейному закону ([6], гл. IV, § 42). Следовательно, справедливо считать, что в реальном течении $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0$ (при $x_2 = 0$). Далее замечаем, что, в силу (1), при $x_2 = 0$ имеем равенство

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2},$$

т.е. $p'_{x_1}(0) = 0$, $\dfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \dfrac{\delta}{2}$. Отсюда следует, что $p''_{x_1 x_1}(0) = 0$, т.е. само условие $y_{x_2}(0) = 0$ имеет второй порядок аппроксимации на решении уравнения (3) (см. [3]).

Литература

1. Каянович С. С. *Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.

2. Каянович С. С. *О разрешимости дифференциально-разностной задачи для стержневого течения* // Тезисы докл. XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017». Ч. 2. Мн., 2017. С. 10–11.

3. Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем.* / М.: Наука, 1971.

4. Каянович С. С. *Об одном разностном методе для нестационарных модифицированных уравнений Навье–Стокса* // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 2. С. 36–40.

5. Каянович С. С. *Стержневое течение вязкой жидкости* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-техн. навук. 2013. № 3. С 32–35.

6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика.* / М.: Наука, 1988.

ЗАДАЧА ГУРСА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Корзюк, О.А. Ковнацкая

Получено классическое решение задачи для квазилинейного гиперболического уравнения в случае двух независимых переменных с заданными условиями для искомой функции на характеристических линиях. Задача сводится к системе уравнений с вполне непрерывным оператором. Решение строится методом последовательных приближений [1]. Проводятся обоснования. Кроме того, показана для рассмотренной задачи единственность полученного классического решения. Доказаны необходимые и достаточные условия согласования заданных функций из рассмотренной задачи, при выполнении которых классическое решение ее существует при наличии определенной гладкости заданных функций.

1. Постановка задачи. На плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\mathfrak{L}u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}) = a(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}^2 u + 2b(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2} u + c(\boldsymbol{x})\partial_{x_2}^2 u + \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

относительно искомой функции $u\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, где a, b, c, f – заданные функции на всей плоскости. Оператор $\mathcal{L}^{(1)}$ рассматриваем как функцию $\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ от переменных $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, которая удовлетворяет следующему условию Липшица.

Условие 1. *Для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ существует константа $L \in \mathbb{R}$, для которой при любых $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ из $\mathbb{R}^3$ выполняется неравенство*

$$|\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})| \leqslant L|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|. \qquad (2)$$

Условие 2. *На всей плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнение (1) является гиперболическим, т. е. дискриминант, составленный из коэффициентов главной части его оператора $\mathfrak{L}$, является положительным:*

$$b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x}) \geqslant A > 0 \qquad (3)$$

для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ и некоторой положительной константы A из множества действительных чисел $\mathbb{R}$.