Литература

1. Каянович С. С. *Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.

2. Каянович С. С. *О разрешимости дифференциально-разностной задачи для стержневого течения* // Тезисы докл. XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017». Ч. 2. Мн., 2017. С. 10–11.

3. Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем.* / М.: Наука, 1971.

4. Каянович С. С. *Об одном разностном методе для нестационарных модифицированных уравнений Навье–Стокса* // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 2. С. 36–40.

5. Каянович С. С. *Стержневое течение вязкой жидкости* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-техн. навук. 2013. № 3. С 32–35.

6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика.* / М.: Наука, 1988.

ЗАДАЧА ГУРСА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Корзюк, О.А. Ковнацкая

Получено классическое решение задачи для квазилинейного гиперболического уравнения в случае двух независимых переменных с заданными условиями для искомой функции на характеристических линиях. Задача сводится к системе уравнений с вполне непрерывным оператором. Решение строится методом последовательных приближений [1]. Проводятся обоснования. Кроме того, показана для рассмотренной задачи единственность полученного классического решения. Доказаны необходимые и достаточные условия согласования заданных функций из рассмотренной задачи, при выполнении которых классическое решение ее существует при наличии определенной гладкости заданных функций.

1. Постановка задачи. На плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\mathfrak{L}u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}) = a(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}^2 u + 2b(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2} u + c(\boldsymbol{x})\partial_{x_2}^2 u + \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

относительно искомой функции $u\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, где a, b, c, f – заданные функции на всей плоскости. Оператор $\mathcal{L}^{(1)}$ рассматриваем как функцию $\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ от переменных $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, которая удовлетворяет следующему условию Липшица.

Условие 1. *Для любого* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ *существует константа* $L \in \mathbb{R}$, *для которой при любых* $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ *и* $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ *из* $\mathbb{R}^3$ *выполняется неравенство*

$$|\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})| \leqslant L|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|. \qquad (2)$$

Условие 2. *На всей плоскости* $\mathbb{R}^2$ *уравнение (1) является гиперболическим, т. е. дискриминант, составленный из коэффициентов главной части его оператора* $\mathfrak{L}$, *является положительным:*

$$b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x}) \geqslant A > 0 \qquad (3)$$

для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ *и некоторой положительной константы* A *из множества действительных чисел* $\mathbb{R}$.

Будем считать, что коэффициент $a(\boldsymbol{x}) \neq 0$ или $c(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Из условия 2 следует, что уравнение (1) имеет два семейства характеристик $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = C_1$ и $\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C_2$, которые являются решениями соответствующего уравнения характеристик

$$a(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_2)^2 - 2b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + c(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_1)^2 = 0. \tag{4}$$

К уравнению (1) присоединим условия Дирихле

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(1)}} = \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(1)}, \tag{5}$$

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(2)}} = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(2)}, \tag{6}$$

которые задаются на характеристиках

$$\gamma^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \mid \varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = C_1^{(0)}\} \quad \text{и} \quad \gamma^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \mid \varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C_2^{(0)}\},$$

которые пересекаются в некоторой точке $\mathcal{M}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$.

Определение 1. *Функцию u из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$ назовем классическим решением задачи (1), (5), (6), если она удовлетворяет уравнению (1) и условиям (5), (6).*

2. Основной результат.

Теорема. *Пусть функции a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. При указанных условиях гладкости заданных функций a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, $\psi^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ и f существует единственное классическое решение $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ задачи (1), (5), (6) тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования*

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}).$$

Литература

1. Корзюк В. И. *Уравнения математической физики.* М.: Ленанд, 2021.

2. Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Сериков В. П. *Задачи для одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках и нехарактеристических линиях* // Труды Института математики. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 106–112.

ЗАДАЧА СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А.Н. Миронов, А.П. Волков

Системы уравнений гиперболического типа исследовались многими авторами (см., например [1-3] и литературу при этих статьях). В работе [4] предложен вариант метода Римана для системы дифференциальных уравнений с кратными характеристиками, в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. Полученные результаты применялись к исследованию граничных задач для гиперболических систем, в том числе с кратными характеристиками [5–9].

Здесь речь идет о системе уравнений с кратными характеристиками с двумя независимыми переменными

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x,y)v_x + b_1(x,y)u + c_1(x,y)v + f_1(x,y), \\ v_{yy} = a_2(x,y)u_y + b_2(x,y)u + c_2(x,y)v + f_2(x,y). \end{cases} \tag{1}$$