Будем считать, что коэффициент $a(\boldsymbol{x}) \neq 0$ или $c(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Из условия 2 следует, что уравнение (1) имеет два семейства характеристик $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = C_1$ и $\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C_2$, которые являются решениями соответствующего уравнения характеристик

$$a(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_2)^2 - 2b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + c(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_1)^2 = 0. \tag{4}$$

К уравнению (1) присоединим условия Дирихле

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(1)}} = \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(1)}, \tag{5}$$

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(2)}} = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(2)}, \tag{6}$$

которые задаются на характеристиках

$$\gamma^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \mid \varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = C_1^{(0)}\} \quad \text{и} \quad \gamma^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \mid \varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C_2^{(0)}\},$$

которые пересекаются в некоторой точке $\mathcal{M}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$.

Определение 1. *Функцию u из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$ назовем классическим решением задачи (1), (5), (6), если она удовлетворяет уравнению (1) и условиям (5), (6).*

2. Основной результат.

Теорема. *Пусть функции a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. При указанных условиях гладкости заданных функций a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, $\psi^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ и f существует единственное классическое решение $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ задачи (1), (5), (6) тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования*

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}).$$

Литература

1. Корзюк В. И. *Уравнения математической физики.* М.: Ленанд, 2021.

2. Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Сериков В. П. *Задачи для одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках и нехарактеристических линиях* // Труды Института математики. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 106–112.

ЗАДАЧА СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А.Н. Миронов, А.П. Волков

Системы уравнений гиперболического типа исследовались многими авторами (см., например [1-3] и литературу при этих статьях). В работе [4] предложен вариант метода Римана для системы дифференциальных уравнений с кратными характеристиками, в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. Полученные результаты применялись к исследованию граничных задач для гиперболических систем, в том числе с кратными характеристиками [5–9].

Здесь речь идет о системе уравнений с кратными характеристиками с двумя независимыми переменными

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x,y)v_x + b_1(x,y)u + c_1(x,y)v + f_1(x,y), \\ v_{yy} = a_2(x,y)u_y + b_2(x,y)u + c_2(x,y)v + f_2(x,y). \end{cases} \tag{1}$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области G плоскости (x, y) выполняются включения $a_i \in C^2$, $b_i, c_i, f_i \in C^1$, $i = \overline{1,2}$. Решение системы (1) класса $u, v \in C^1(G)$, $u_{xx}, v_{yy} \in C(G)$ назовем *регулярным в* G.

Задача D**:** найти в области $D_0\colon\ 0 < y < x < T$ регулярное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{array}{ll} u(y,y) = \varphi_1(y), & (u_x - a_1 v)(y,y) = \varphi_2(y), \\ v(x,0) = \psi_1(x), & (v_y - a_2 u)(x,0) = \psi_2(x), \end{array}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x) \in C^1([0,T])$.

Методом интегральных уравнений доказаны существование и единственность решения задачи D, предложен способ определения матрицы Римана–Адамара задачи D (которая играет здесь ту же роль, что и матрица Римана–Адамара при решении задачи Дарбу [9]), опирающийся на определение матрицы Римана [4–6]. Построено решение задачи D в терминах предложенной матрицы Римана–Адамара.

Литература

1. Бицадзе А. В. *О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными* // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. № 6. С. 22–31.

2. Чекмарев Т. В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614–1622.

3. Плещинская И. Е. *Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными* // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1634–1637.

4. Миронова Л. Б. *О методе Римана в* $\mathbb{R}^n$ *для одной системы с кратными характеристиками* // Известия вузов. Математика. 2006. № 1. С. 34–39.

5. Миронова Л. Б. *О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными* // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. № 43. С. 31–37.

6. Жегалов В. И., Миронова Л. Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными* // Известия вузов. Математика. 2007. № 3. С. 12–21.

7. Созонтова Е. А. *О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа* // Известия вузов. Математика. 2013. № 10. С. 43–54.

8. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. *Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка* n *с некратными характеристиками* // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 4. С. 752–759.

9. Mironova L. B. *Boundary-value Problems with Data on Characteristics for Hyperbolic Systems of Equations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. № 3. P. 400–406.

ЛОКАЛЬНОЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА

А.И. Никитин, Д.А. Булыно

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана: