$$\begin{cases} u_t = \Delta u - c_1(x,t)v^p, \quad v_t = \Delta v - c_2(x,t)u^q, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \displaystyle\int\limits_{\Omega} \phi(x,y,t)u^m(y,t)\,dy, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \displaystyle\int\limits_{\Omega} \psi(x,y,t)v^n(y,t)\,dy, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \qquad (1)$$

где $p,\ q,\ m,\ n$ – положительные постоянные, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, ν – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1) будем предполагать следующее:

$$c_i(x,t) \in C^{\alpha}_{loc}\big(\bar\Omega \times [0,+\infty)\big), \quad 0 < \alpha < 1, \quad c_i(x,t) \geqslant 0, \quad i = 1,2;$$

$$\phi(x,y,t) \in C\big(\partial\Omega \times \bar\Omega \times [0,+\infty)\big), \quad \phi(x,y,t) \geqslant 0;$$

$$\psi(x,y,t) \in C\big(\partial\Omega \times \bar\Omega \times [0,+\infty)\big), \quad \psi(x,y,t) \geqslant 0;$$

$$u_0(x), v_0(x) \in C^1(\bar\Omega), \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad v_0(x) \geqslant 0 \text{ в } \Omega;$$

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} \phi(x,y,0)u_0^m(y)\,dy, \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} \psi(x,y,0)v_0^n(y)\,dy \text{ на } \partial\Omega.$$

Пусть $Q_T = \Omega\times(0,T)$. Для данной задачи было доказано локальное существование решения.

Теорема. *Для малых значений T задача (1) имеет единственное решение в Q_T.*

Литература

1. Gladkov A., Guedda M. *Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition* // Applicable Analysis. 2012. V. 91. № 12. P. 2267-2276.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ж.А. Отарова, А.Б. Бекиев

В работе рассматривается обратная задача для уравнения четвертого порядка смешанного типа с нелокальными условиями.

В области $\Omega = \big\{(x,t) : 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\big\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xxxx}(x,t) - \operatorname{sgn} t\, u_{tt}(x,t) = f(x).$$

Задача 1. Найти в области Ω функции $u(x,t), f(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\left(\bar\Omega\right) \cap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega_+ \cup \Omega_-\right),$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x), \ (x,t) \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

$$u(0,t) = 0, \ u_x(0,t) = u_x(1,t), \ u_{xx}(1,t) = 0, \ u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t), \ -\alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(x,-\alpha) = \eta(x), \ u_t(x,-\alpha) = \xi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $\Omega_+ = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{t < 0\}$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\eta(x)$, $\xi(x)$ – заданные гладкие функции.

Такие нелокальные обратные задачи для уравнений второго порядка исследованы в работах К.Б. Сабитова [1–4], Н.В. Мартемьянова [1], С.Н. Сидорова [5].

Система функций

$$X_0(x) = 2x, \ \ X_n^{(1)}(x) = 2\sin\lambda_n x, \ \ X_n^{(2)}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} - e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \cos\lambda_n x \tag{1}$$

и биортогональная с ней система функций

$$Y_0(x) = 1, \ Y_n^{(1)}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} + e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \sin\lambda_n x, \ Y_n^{(2)}(x) = 2\cos\lambda_n x, \quad \lambda_n = 2\pi n, \quad n = 1, 2, ...,$$

образуют базис Рисса в $L_2(0,\, 1)$ [6].

Имеет место следующая

Теорема. *Если функции $\varphi(x)$, $\eta(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\varphi(x),\ \eta(x) \in C^{(5)}[0,\, 1],\ \varphi(0) = \eta(0) = 0,\ \varphi'(0) = \varphi'(1),\ \eta'(0) = \eta'(1),$$

$$\varphi''(1) = 0,\ \eta''(1) = 0,\ \varphi'''(0) = \varphi'''(1),\ \eta'''(0) = \eta'''(1),\ \varphi^{(4)}(0) = \eta^{(4)}(0) = 0,$$

$$\xi(x),\ \psi(x) \in C^{(3)}[0,\, 1],\ \xi(0) = \psi(0) = 0,\ \xi'(0) = \xi'(1),$$

$$\psi'(0) = \psi'(1),\ \xi''(1) = 0,\ \psi''(1) = 0$$

и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left(1 - \cos\lambda_n^2\beta\right)\operatorname{sh}\lambda_n^2\alpha + \left(\operatorname{ch}\lambda_n^2\alpha - 1\right)\sin\lambda_n^2\beta \neq 0,$$

то существует единственное регулярное решение задачи 1.

Доказательство теоремы устанавливается с помощью разложения в ряд (1) решения $u(x, t)$.

Литература

1. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. *Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием* // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 3. С. 633–647.

2. Сабитов К. Б., Сафин Э. М *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Математические заметки. 2010. Т. 87. № 6. С. 907-918.

3. Сабитов К. Б., Сафин Э. М *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Известия вузов. Математика. 2010. № 4. С. 55–62.

4. Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.* М: Наука. 2016.

5. Сидоров С. Н. *Прямые и обратные задачи для вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальными условиями*: автореф. канд. дис. . . . Казань, 2015.

6. Кадиркулов Б. Ж. *Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка* // Узбекский математический журнал. 2012. № 1. С. 74–80.