О НЕУСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЯХ РАВНОВЕСИЯ 2–D МОДЕЛИ БРОУДВЕЛЛА

Е.В. Радкевич, О.А. Васильева, П.А. Захарченко

Кинетическая теория рассматривает газ как совокупность громадного числа хаотически движущихся частиц тем или иным образом взаимодействующих между собой [2, 3]. В результате таких взаимодействий частицы обмениваются импульсами, энергией. Взаимодействие может осуществляться путем прямого столкновения частиц или при помощи тех или иных сил. Для пояснения математической схемы, описывающей подобные явления, в [2] рассматриваются так называемые дискретные модели кинетического уравнения Больцмана и приводится феноменологический вывод уравнения Больцмана для газовой модели с конечным числом различных скоростей частиц и конечным числом разных взаимодействий (модели типа Броудвелла [1]).

Двумерная модель Броудвелла

$$\partial_t n_1 + c\partial_x n_1 = \frac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2),$$

$$\partial_t n_2 - c\partial_x n_2 = \frac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2),$$

$$\partial_t n_3 + c\partial_y n_3 = \frac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4),$$

$$\partial_t n_4 - c\partial_y n_4 = \frac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4)$$

(см. так же [9]) относится к классу неинтегрируемых уравнений. Система (1) является кинетическим уравнением Больцмана модельного двумерного газа [1] частиц движущихся на двумерной плоскости, скорости которых $\big((c,0),\ (-c,0),\ (0,c),\ (0,-c)\big)$ будем предполагать направленными вдоль координатных осей. Здесь $n_1(x,y,t),\ n_2(x,y,t)$, $n_3(x,y,t),\ \ n_4(x,y,t)$ – плотность(число частиц на единицу площади) частиц соответствующих четырех групп. Все частицы распределены по четырем группам со скоростями $(c,0),\ (-c,0),\ (0,c),\ (0,-c)$, обмениваются скоростями – $I+II=II+I$, переходя в частицы третьей и четвертой групп $(I+II\ =\ III+IV)$. Аналогично $III+IV=IV+III$ или $III+IV=I+II,\ \ I+III=III+I,\ \ I+IV=IV+I$, $II+III=III+II,\ \ II+IV=IV+II$. Изменение числа частиц в группах может происходить только в результате реакций:

$$I+II=III+IV, \quad III+IV=I+II.$$

Как показано в [2], $n_i>0,\ i=1,\dots,4,$ если начальные условия $n_i^0>0,\ i=1,\dots,4.$ Здесь выполнены уравнение неразрывности и уравнения сохранения импульса.

Эта система обнаруживает нерегулярное поведение решений(численным экспериментом устанавливает неустойчивость стационарных решений в линейном приближении при некоторых значениях внутренних параметров). Наша задача – установить это аналитически.

Мы рассмотрим малые периодические возмущения состояния равновесия

$$n_1=n_1^e+\varepsilon^2\sqrt{n_1^e}\,u, \quad n_2=n_2^e+\varepsilon^2\sqrt{n_2^e}\,v, \quad n_3=n_3^e+\varepsilon^2\sqrt{n_3^e}\,w, \quad n_4=n_4^e+\varepsilon^2\sqrt{n_4^e}\,z.$$

Докажем, что положительные состояния равновесия $(n_1^e, n_2^e, n_3^e, n_4^e)$, $n_j^e > 0$, $n_1^e n_2^e = n_3^e n_4^e$ при условии $n_3^e > n_1^e$, $n_4^e > n_1^e$ являются седлами. Устойчивое многообразие определяется соотношениями «креста»

$$u^0_{k,-k} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} z^0_{k,-k} = v^0_{k,k} + \frac{z_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} z^0_{k,k} = 0$$

на коэффициенты Фурье начального возмущения (u_0, v_0, w_0, z_0). При достаточно гладких начальных данных стабилизация вдоль устойчивого многообразия – экспоненциальная, т.е. существует $\gamma = O(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sup_Q \big(|u| + |v| + |w| + |z|\big)(t) \leqslant Ce^{-\gamma t},$$

где Q – ячейка периодичности.

Литература

1. Broadwell T. E. *Study of rarified shear flow by the discrete velocity method* // J. of Fluid Mechanics. 1964. V. 19:3.

2. Годунов С. К., Султангазин У. М. *О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана* // Успехи математических наук. 1974. Т. XXVI. В. 3(159). С. 3–51.

3. Boltzmann L. *On the Maxwell method to the reduction of hydrodynamic equations from the kinetic gas theory* // Rep. Brit. Assoc. in the L. Boltzmann memories. 1984. V. 2. P. 307-321.

4. Radkevich E. V. *Mathematical Aspects of Nonequilibrium Processes*| / Novosibirsk: Tamara Rozhkovskaya Publisher, 2007.

5. Ильин О. В. *Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. В. 47. № 12. С. 2076–2087.

6. Радкевич Е.В. *О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 47. С. 108–139.

7. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A. *Local equilibrium of the Carleman equaiton* // Journal of Mathematical Sciences. 2015. V. 207. № 2.

8. Радкевич Е. В., Васильева О. А., Духновский С. А. *О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова–Султангазина* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 60. С. 1–58.

9. Рабинович М. И. *Стохастические автоколебания и турбулентность* // Успехи физических наук. 1978. Т. 125. № 1. С. 123–168.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

М.Х. Рузиев, Г.Б. Рахимова

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\gamma}_{0+,y} u = 0, \;\; 0 < \gamma < 1, \quad y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\alpha_0}{(-y)^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \dfrac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\gamma}_{0+,y}$ – частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка γ $(0 < \gamma < 1)$ от функции $u(x, y)$ по второй переменной [1, с. 34] в области D, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости $D^+ = \big\{(x, y) : -\infty < x < \infty,\; y > 0\big\}$