Докажем, что положительные состояния равновесия $(n_1^e, n_2^e, n_3^e, n_4^e)$, $n_j^e > 0$, $n_1^e n_2^e = n_3^e n_4^e$ при условии $n_3^e > n_1^e$, $n_4^e > n_1^e$ являются седлами. Устойчивое многообразие определяется соотношениями «креста»

$$u^0_{k,-k} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} z^0_{k,-k} = v^0_{k,k} + \frac{z_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} z^0_{k,k} = 0$$

на коэффициенты Фурье начального возмущения (u_0, v_0, w_0, z_0). При достаточно гладких начальных данных стабилизация вдоль устойчивого многообразия – экспоненциальная, т.е. существует $\gamma = O(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sup_Q \big(|u| + |v| + |w| + |z|\big)(t) \leqslant Ce^{-\gamma t},$$

где Q – ячейка периодичности.

Литература

1. Broadwell T. E. *Study of rarified shear flow by the discrete velocity method* // J. of Fluid Mechanics. 1964. V. 19:3.
2. Годунов С. К., Султангазин У. М. *О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана* // Успехи математических наук. 1974. Т. XXVI. В. 3(159). С. 3–51.
3. Boltzmann L. *On the Maxwell method to the reduction of hydrodynamic equations from the kinetic gas theory* // Rep. Brit. Assoc. in the L. Boltzmann memories. 1984. V. 2. P. 307-321.
4. Radkevich E. V. *Mathematical Aspects of Nonequilibrium Processes*| / Novosibirsk: Tamara Rozhkovskaya Publisher, 2007.
5. Ильин О. В. *Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. В. 47. № 12. С. 2076–2087.
6. Радкевич Е.В. *О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 47. С. 108–139.
7. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A. *Local equilibrium of the Carleman equaiton* // Journal of Mathematical Sciences. 2015. V. 207. № 2.
8. Радкевич Е. В., Васильева О. А., Духновский С. А. *О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова–Султангазина* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 60. С. 1–58.
9. Рабинович М. И. *Стохастические автоколебания и турбулентность* // Успехи физических наук. 1978. Т. 125. № 1. С. 123–168.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

М.Х. Рузиев, Г.Б. Рахимова

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\gamma}_{0+,y} u = 0, \ \ 0 < \gamma < 1, \quad y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\alpha_0}{(-y)^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \dfrac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\gamma}_{0+,y}$ – частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка γ $(0 < \gamma < 1)$ от функции $u(x, y)$ по второй переменной [1, с. 34] в области D, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости $D^+ = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, \ y > 0\}$

и области D^-, лежащей в нижней полуплоскости ($y < 0$) и ограниченной характеристиками

$$OC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

и отрезком [0,1] прямой $y = 0$. В (1) m, α_0, β_0 – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$m > 0, \quad |\alpha_0| < \frac{m+2}{2}, \quad 1 < \beta_0 < \frac{m+4}{2}.$$

Задача. Найти в области D функцию $u(x, y)$, которая:
1) $u(x, y)$ стремится к нулю при $(x^2 + y^2) \to \infty$;
2) удовлетворяет краевым условиям

$$y^{1-\gamma}u|_{y=0} = 0, (-\infty < x \leqslant 0,\ 1 \leqslant x < \infty),$$

$$u|_{OC} = \psi(x),\ \ x \in [0, 1/2],$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\gamma}u(x, y) = \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0-1}u(x, y),\ \ x \in \bar{I} = [0, 1],$$

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\gamma}\big(y^{1-\gamma}u(x, y)\big)_y = \lim_{y\to-0}(-y)^{2-\beta_0}\big((-y)^{\beta_0-1}u(x, y)\big)_y,\ x \in I = (0, 1),$$

где $\psi(x)$ – заданная функция, $\psi(0) = 0$.

Будем искать решение $u(x, y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D таких, что

$$y^{1-\gamma}u \in C(\bar{D^+}), \quad u(x, y) \in C\big(\bar{D^-} \setminus \overline{OB}\big),$$

$$y^{1-\gamma}(y^{1-\gamma}u)_y \in C\Big(D^+ \cup \big\{(x, y) :\ 0 < x < 1,\ y = 0\big\}\Big),$$

$$u_{xx} \in C(D^+ \cup D^-), \quad u_{yy} \in C(D^-).$$

Доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи.

Отметим, что краевые задачи для уравнения (1) в случае когда $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$ исследованы в работах [2, 3]. Краевая задача со смещением для уравнения (1) при $-m/2 < \beta_0 < 1$ в области D изучена в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Ф-ФА-2021-424 Министерства инновационного развития Республики Узбекистан.

Литература

1. Самко С. Г., Килбасс А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск.: Наука и техника, 1987.

2. Килбасс А. А., Репин О. А. *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной* // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 638–644.

3. Геккиева С. Х. *Об одном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной* // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2001. Т. 5. № 2. С. 18–22.

4. Ruziev M. Kh. *A boundary value problem for partial differential equation with fractional derivative* // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2021. Т. 24. № 2. С. 509–517.