ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ НА ПОЛУПРЯМОЙ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ГРАНИЦЕ

К.А. Спесивцева, Ф.Е. Ломовцев

Найдены решение и условия корректности смешанной задачи:

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)\,u_{xt}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in\dot{G}_\infty=(0,+\infty)\times(0,+\infty),\quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x),\ \ u_t(x,t)|_{t=0}=\psi(x),\ \ x>0,\qquad (2)$$

$$\big[\zeta(t)u_{tt}+\xi(t)u_{xt}+\theta(t)u_{xx}+\alpha(t)u_t+\beta(t)u_x+\gamma(t)u\big]|_{x=0}=\mu(t),\quad t>0,\qquad (3)$$

где $a_1>0,\ a_2>0,\ b_1,\ b_2\in\mathbb{R},\ \ f,\ \varphi,\ \psi,\ \mu$ – заданные функции. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых вещественных функций на подмножестве $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Первая четверть плоскости $G_\infty=[0,\infty[\times[0,\infty[$ делится критической характеристикой $x=a_1t$ на два множества $G_-=\{(x,t)\in G_\infty: x>a_1t,\ t>0\}$ и $G_+=\{(x,t)\in G_\infty: x\leqslant a_1t,\ x\geqslant 0\}$.

Определение 1. Функция $u\in C^n(G_\infty),\ G_\infty=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, называется *гладким* решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет (1) на $\dot{G}_\infty$ в обычном смысле, а (2) и (3) – в смысле пределов от $u(\dot{x},\dot{t})$ в точках $(\dot{x},\dot{t})\in\dot{G}_\infty$ при $\dot{x}\to x,\ \dot{t}\to t$ для граничных точек (x,t).

В [1] выведена критериальность условий согласования (3) с (2) и (1) для задачи (1)–(3):

$$Y_{k+1}\equiv\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!\,(k-i)!}\Big\{S_{i,k}+\alpha^{(k-i)}(0)A_i+\beta^{(k-i)}(0)B_i+$$
$$+\Big[\eta_i\alpha^{(k-i)}(0)+\eta_{i-1}\beta^{(k-i)}(0)\Big]\varphi^{(i+1)}(0)+\Big[\rho_i\alpha^{(k-i)}(0)+\rho_{i-1}\beta^{(k-i)}(0)\Big]\psi^{(i)}(0)+$$
$$+\gamma^{(k-i)}(0)\Big[D_i+\eta_{i-1}\varphi^{(i)}(0)+\rho_{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\Big]\Big\}=\mu^{(k)}(0),\qquad (4)$$

$$S_{i,k}=\zeta^{(k-i)}(0)\Big\{f^{(0,i)}(0,0)+(a_2-a_1)Z_i+$$
$$+(a_2-a_1)a_2^i[a_1\varphi^{(i+2)}(0)+\psi^{(i+1)}(0)]\Big\}+\xi^{(k-i)}(0)\Big\{\Xi_i+a_2^i\Big[a_1\varphi^{(i+2)}(0)+\psi^{(i+1)}(0)\Big]\Big\},$$

$$i\in[0,k]\,,\ \ k\in[0,n-1]\,,\ \ n\geqslant 2,\ \ f^{(i,j)}=\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial t^j},$$

где

$$A_i=\sum_{s=1}^{i}\rho_{s-1}f^{(s-1,i-s)}(0,0),\ \ i\geqslant 1,\ \ A_0=0;\qquad B_i=\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s,i-s-1)}(0,0),\ \ B_0=B_1=0,$$

$$D_i=\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s-1,i-s-1)}(0,0),\ i\geqslant 2,\ \ D_0=D_1=0;$$

$$Z_i=\sum_{s=1}^{i}a_2^{s-1}f^{(s,i-s)}(0,0),\ i\geqslant 1,\ \ Z_0=0;\qquad \Xi_i=\sum_{s=1}^{i}a_2^{s-1}f^{(s,i-s)}(0,0),\ i\geqslant 1,\ \ \Xi_0=0;$$

$$\rho_j = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{2j-k} a_1^k a_2^{n-k}, \quad \eta_j = a_1 a_2 \sum_{k=1}^{j} (-1)^{2j-k} a_1^k a_2^{n-k-1}.$$

Сумма $S_{n-1,n-1}$ из (4) содержит частные производные порядка $n-1$ от $f \in C^{n-1}(G_\infty)$:

$$K_n(x) \equiv \Big\{(a_2 - a_1)\zeta(0) + \xi(0)\Big\} \left(\sum_{s=1}^{n-1} a_2^{s-1} f^{(s,n-s-1)}(x,0) \right) + \zeta(0) f^{(0,n-1)}(x,0). \qquad (5)$$

Определение 2. Числа $K_n(0)$ из (5) при $f(x,t) = f_0(x,t)$ и $x = 0$ называются *критериальными значениями* производных от f порядка $n-1$ в (4) при $q = n$ и целых $n \geqslant 2$ для пределов $f_0(x,t) = \lim_{m\to\infty} f_m(x,t)$ функций $f_m(x,t) \in C^n(G_\infty)$ по норме соответствующего банахова пространства функций $f_0(x,t) \in C^{n-2}(G_\infty)$, удовлетворяющих (7), (8) и

$$\theta(t) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{a_1 - a_2}{a_1} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t f(a_2(t-\tau), \tau) d\tau \right] - f(0,t) \right\} +$$

$$+ a_2 \xi(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^t f(a_2(t-\tau), \tau) d\tau \right] \in C^{n-2}(\mathbb{R}_+). \qquad (6)$$

Используем частные классические решения неоднородного уравнения (1) на $\dot{G}_\infty$ из [2]:

$$F_i(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_i(x)} \int_{x_i(t,\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau) ds d\tau + \int_{t_i(x)}^{t} \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau) ds d\tau \right], \ t_i(x) = (-1)^i \left(t - \frac{x}{a_1} \right),$$

где $x_i(t,\tau) = \Big[1 - (-1)^i ((a_2/a_1) + 1)\Big] (x - a_1 t) - a_2 \tau$, $i = 1, 2$. Кроме того, введем обозначения

$$\Gamma(t) = \left[\zeta(t) u_{tt} + \xi(t) u_{xt} + \theta(t) u_{xx} + \alpha(t) u_t + \beta(t) u_x + \gamma(t) u\right]\big|_{x=0},$$

$$L(y) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[a_1 \varphi(y) + a_2 \varphi(0) + \int_0^y \psi(s) ds \right], \quad M(t) = \Gamma(t) \left[L(x + a_2 t) + F_2(x,t) \right].$$

Теорема. *Пусть в (3) коэффициенты ζ, ξ, θ, α, β, $\gamma \in C^{m-1}(\mathbb{R}_+)$, нехарактеристические первые косые производные, т.е. $a_1 \alpha(t) \neq \beta(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, и характеристические вторые частные производные [2], т.е. $a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда задача (1)–(3) на $\dot{G}_\infty$ имеет единственное и устойчивое по φ, ψ, μ, f гладкое решение $u \in C^n(G_\infty)$, $n \geqslant 2$, для тех и только тех φ, ψ, μ, f, для которых $\varphi, \mu \in C^n(\mathbb{R}_+)$, $\psi \in C^{n-1}(\mathbb{R}_+)$, $f \in C^{n-2}(G_\infty)$,*

$$\int_0^t f(x + a_2(t-\tau), \tau) d\tau \in C^{n-1}(G_\infty), \qquad (7)$$

$$\big[1-(-1)^i(a_2/a_1+1)\big]\int\limits_0^{t_i(x)} f\big(x_i(t,\tau),\tau\big)\,d\tau+\int\limits_{t_i(x)}^{t} f\big(x-a_1(t-\tau),\tau\big)\,d\tau\in C^{n-1}(G_\infty),\ \ i=1,2,\quad (8)$$

$$\big[(a_2-a_1)\zeta(t)+\xi(t)\big]\varphi^{(n+1)}(a_2t),\ \big[(a_2-a_1)\zeta(t)+\xi(t)\big]\psi^{(n)}(a_2t)\in C(\mathbb{R}_+),$$

и верны условия согласования (4) при $n\geqslant 2$ *с критериальными значениями* $K_n(0)$ *суммы старших производных порядка* $n-1$ *от* $f\in C^{n-2}(G_\infty)$*, удовлетворяющей требованиям гладкости (6)–(8). Гладким решением* $u\in C^n(G_\infty)$ *задачи (1)–(3) на* $\dot G_\infty$ *служит функция:*

$$u_-(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\Bigg[a_1\varphi(x+a_2t)+a_2\varphi(x-a_1t)+\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t}\psi(s)ds+\int\limits_0^t\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau\Bigg],\ (x,t)\in G_-,$$

$$u_+(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\Bigg[a_1\varphi(x+a_2t)+a_2\varphi(0)+\int\limits_0^{x+a_2t}\psi(s)\,ds\Bigg]+$$

$$+a_1\int\limits_0^{t_2(x)} e^{a_1\int\limits_{t_2(x)}^{\rho}\frac{\gamma(\nu)}{a_1\alpha(\nu)-\beta(\nu)}d\nu}\,\frac{\mu(\rho)-M(\rho)}{a_1\alpha(\rho)-\beta(\rho)}\,d\rho+F_2(x,t),\quad (x,t)\in G_+.$$

Эта работа ведётся в рамках проекта НИР 1.2.02.3 ГПНИ «Конвергенция-2025».

Литература

1. Ломовцев Ф. Е., Спесивцева К. А. *Согласование характеристических производных граничного режима с начальными условиями и одномерным волновым уравнением* // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2021. № 1(57). С. 53–62.

2. Ломовцев Ф. Е. *Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38—52.

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.И. Усков, А.Г. Пантелеева

Рассматривается задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial t}+cu(x,t)+f(x,t),\tag{1}$$

$$u(x,0)=g(x),\quad u(0,t)=h(t)\quad \big(g(0)=h(0)\big),\tag{2}$$

где $a,\ b,\ c$ – заданные постоянные, $f,\ g,\ h$ – заданные достаточно гладкие функции; $(x,t)\in\Pi=[0,x_k]\times[0,t_k]$.

Уравнениями в частных производных второго порядка описываются явления в квантовой экономике [1], процессы сорбции и десорбции газов, процессы сушки [2] и т.д.