$$\big[1-(-1)^i(a_2/a_1+1)\big]\int\limits_0^{t_i(x)} f\big(x_i(t,\tau),\tau\big)\,d\tau+\int\limits_{t_i(x)}^{t} f\big(x-a_1(t-\tau),\tau\big)\,d\tau\in C^{n-1}(G_\infty),\ \ i=1,2, \quad (8)$$

$$\big[(a_2-a_1)\zeta(t)+\xi(t)\big]\varphi^{(n+1)}(a_2t),\ \big[(a_2-a_1)\zeta(t)+\xi(t)\big]\psi^{(n)}(a_2t)\in C(\mathbb{R}_+),$$

и верны условия согласования (4) при $n\geqslant 2$ *с критериальными значениями* $K_n(0)$ *суммы старших производных порядка* $n-1$ *от* $f\in C^{n-2}(G_\infty)$*, удовлетворяющей требованиям гладкости (6)–(8). Гладким решением* $u\in C^n(G_\infty)$ *задачи (1)–(3) на* $\dot G_\infty$ *служит функция:*

$$u_-(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi(x+a_2t)+a_2\varphi(x-a_1t)+\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t}\psi(s)ds+\int\limits_0^t\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right],\ (x,t)\in G_-,$$

$$u_+(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi(x+a_2t)+a_2\varphi(0)+\int\limits_0^{x+a_2t}\psi(s)\,ds\right]+$$

$$+\,a_1\int\limits_0^{t_2(x)} e^{a_1\int_{t_2(x)}^{\rho}\frac{\gamma(\nu)}{a_1\alpha(\nu)-\beta(\nu)}d\nu}\,\frac{\mu(\rho)-M(\rho)}{a_1\alpha(\rho)-\beta(\rho)}\,d\rho+F_2(x,t),\quad (x,t)\in G_+.$$

Эта работа ведётся в рамках проекта НИР 1.2.02.3 ГПНИ «Конвергенция-2025».

Литература

1. Ломовцев Ф. Е., Спесивцева К. А. *Согласование характеристических производных граничного режима с начальными условиями и одномерным волновым уравнением* // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2021. № 1(57). С. 53–62.

2. Ломовцев Ф. Е. *Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38—52.

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.И. Усков, А.Г. Пантелеева

Рассматривается задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial t}+cu(x,t)+f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0)=g(x),\quad u(0,t)=h(t)\quad \big(g(0)=h(0)\big), \tag{2}$$

где $a,\ b,\ c$ – заданные постоянные, $f,\ g,\ h$ – заданные достаточно гладкие функции; $(x,t)\in\Pi=[0,x_k]\times[0,t_k]$.

Уравнениями в частных производных второго порядка описываются явления в квантовой экономике [1], процессы сорбции и десорбции газов, процессы сушки [2] и т.д.

Под *решением задачи (1), (2)* подразумевается функция $u(x,t)$, дифференцируемая по x при каждом $t \in [0,t_k]$, дифференцируемая по t при каждом $x \in [0,x_k]$, со всеми входящими в уравнение (1) непрерывными в Π частными производными и удовлетворяющая (1), (2) на Π.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *Если линейные операторы A, B коммутируют по умножению, то справедлив аналог бинома Ньютона*

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i A^{k-i} B^i, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

где $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$.

Лемма 1 доказывается методом математической индукции.

Предложение 1. *Для достаточное количество раз интегрируемой функции $f(x)$ справедлива формула:*

$$\int_0^x \int_0^{s_0} \ldots \int_0^{s_{k-2}} f(s_{k-1})\, ds_{k-1}\, ds_{k-2}, \ldots\, ds_0 = \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(s)\, ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Предложение 1 устанавливается с помощью метода интегрирования по частям несколько раз.

Начально-краевая задача для уравнения (1) с переменными коэффициентами изучена в работе [3]. Там она сводится равносильными заменами к задаче Коши для алгебро-дифференциального уравнения первого порядка с вырожденным операторным коэффициентом при производной и для ее решения используется метод декомпозиции. Применим полученные результаты в частном случае постоянных коэффициентов. Обозначим: I – единичный оператор,

$$d = ab + c, \quad T(x) = aI + d\int_0^x e^{b(x-s)}(\cdot)\, ds, \quad \Phi(x,t) = e^{bx}\big(h'(t) - ah(t)\big) + \int_0^x e^{b(x-s)} f(s,t)\, ds.$$

Предложение 2. *Операторная экспонента $e^{tT(x)}$ раскладывается в ряд*

$$e^{tT(x)} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} T^k(x),$$

где

$$T^k(x) = a^k I + \sum_{i=1}^{k} \int_0^x \frac{C_k^i a^{k-i} d^i}{(i-1)!} (x-s)^{i-1} e^{b(x-s)}(\cdot)\, ds.$$

Оно вытекает из леммы 1 и предложения 1 и применения ряда МакЛорена.

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна в Π, $h(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и имеет вид*

$$u(x,t) = e^{tT(x)} g(x) + \int_0^t e^{(t-r)T(x)} \Phi(x,r)\, dr.$$

Теорема выполняется, поскольку при сделанных допущениях T – ограниченный и сильно непрерывный оператор, Φ – непрерывная функция.

Проиллюстрируем теорему.

Пример 1. Рассмотрим задачу в Π для однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial t} + 5u(x,t), \tag{3}$$

$$u(x,0) = e^x, \quad u(0,t) = \cos t. \tag{4}$$

Выполняется условие согласования: $e^0 = \cos 0 = 1$. Запишем решение в виде частичной суммы первых пяти слагаемых ряда. Вычисления приводят к решению задачи (3), (4)

$$u(x,t) \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{t^k}{k!}\, g_k(x),$$

где

$$g_0(x) = g(x) = e^x, \quad g_1(x) = -\frac{7}{2}e^x + \frac{11}{2}e^{3x},$$

$$g_2(x) = \frac{49}{4}e^x - \frac{33}{4}e^{3x} + \frac{121}{2}xe^{3x}, \quad g_3(x) = -\frac{343}{8}e^x + \frac{407}{8}e^{3x} + \frac{121}{4}xe^{3x} + \frac{1331}{4}x^2e^{3x},$$

$$g_4(x) = \frac{2401}{16}e^x - \frac{2145}{16}e^{3x} + \frac{4961}{8}xe^{3x} + \frac{6655}{8}x^2e^{3x} + \frac{14641}{12}x^3e^{3x}.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу в Π для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + 2u(x,t) - 3e^{x+t}, \tag{5}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = \sin t. \tag{6}$$

Выполняется условие согласования: $0 = \sin 0 = 0$.

Так как $d = -1 \cdot 2 + 2 = 0$, то решение можно записать в виде элементарной функции. Вычисления приводят к решению задачи (5), (6)

$$u(x,t) = e^{2x}\sin t - 3(e^{2x} - e^x)\,\mathrm{sh}\, t.$$

Литература

1. Маслов В. П. *Квантовая экономика.* Режим доступа: http://viktor-maslov.narod.ru/Quanrum Economics.pdf. Дата доступа: 25.11.2021.

2. Тихонов А. Н., Забежинский Я. Л. *Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала* // Журнал физической химии. 1946. Т. 20. Вып. 10. С. 1113–1126.

3. Баев А. Д., Зубова С. П., Усков В. И. *Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции* // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика. 2013. № 2. С. 134–140.