ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Е.В. Устилко, Ф.Е. Ломовцев

В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty$ решается смешанная задача

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t),\ \ (x,t) \in \dot{G}_\infty = (0,+\infty)\times(0,+\infty), \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ \ \partial_t u(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

$$[\alpha(t)\partial_t u(x,t) + \beta(t)\partial_x u(x,t) + \gamma(t)u(x,t)]|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

где коэффициенты $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – заданные функции переменной t; $f,\ \varphi,\ \psi,\ \mu$ – заданные функции своих переменных $x,\ t$ и постоянные $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1,\ b_2 \in (-\infty,+\infty)$.

Множество $G_\infty = [0,+\infty)\times[0,+\infty)$ разбивается характеристикой $x = a_1 t$ на два множества $G_- = \{(x,t)\in G_\infty : x > a_1 t > 0\}$ и $G_+ = \{(x,t)\in G_\infty : 0 \leqslant x \leqslant a_1 t\}$.

Для задачи (1)–(3) выведены следующие условия согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) (в [1] для $m = 2$, в [2] для $b_1 = b_2 = 0$):

$$\Big\langle \alpha^{(q)}(0)[\psi(0) + a_1\varphi'(0)] +$$

$$+\varphi(0)\gamma^{(q)}(0)\Big\rangle + q\Big\{\alpha^{(q-1)}(0)\Big\langle a_2[-B(A\varphi(0)+\psi(0)) + A\varphi'(0) + \psi'(0) +$$

$$+a_1(B^2\varphi(0) - 2B\varphi'(0) + \varphi''(0))] + f(0,0)\Big\rangle + \big(\gamma^{(q-1)}(0) - b_1\alpha^{(q-1)}(0)\big)\big(A\varphi(0)+\psi(0)\big)\Big\} +$$

$$+\sum_{i=2}^{q} C_q^i\Big\{\alpha^{(q-i)}(0)\Big\langle a_2^i\Big[\sum_{s=0}^{i} C_i^s(-B)^{i-s}\Big(\Big(A - \frac{(i+1)\,a_1B}{i-s+1}\Big)\varphi^{(s)}(0) + \psi^{(s)}(0)\Big) + a_1\varphi^{(i+1)}(0)\Big] +$$

$$+\sum_{j=0}^{i-1} a_2^j \sum_{p=0}^{j}\sum_{s=0}^{i-j-1} C_j^p C_{i-j-1}^s A^{i-j-s-1}(-B)^{j-p} f^{(p,s)}(0,0)\Big\rangle + (\gamma^{(q-i)}(0) - b_1\alpha^{(q-i)}(0))\times$$

$$\times\Big\langle a_2\frac{a_2^{i-1} - (-a_1)^{i-1}}{a_1+a_2}\Big[\sum_{s=0}^{i-1} C_{i-1}^s(-B)^{i-s-1}\Big(\Big(A - \frac{i\,a_1B}{i-s}\Big)\varphi^{(s)}(0) + \psi^{(s)}(0)\Big) + a_1\varphi^{(i)}(0)\Big] +$$

$$+\sum_{k=0}^{i-2}\frac{a_2^{k+1} - (-a_1)^{k+1}}{a_1+a_2}\sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{i-k-2} C_k^p C_{i-k-2}^s A^{i-k-s-2}(-B)^{k-p} f^{(p,s)}(0,0) +$$

$$+(-a_1)^{i-1}\sum_{s=0}^{i-1} C_{i-1}^s(-B)^{i-s-1}\big(A\varphi^{(s)}(0) + \psi^{(s)}(0)\big)\Big\rangle\Big\} = \sum_{i=0}^{q} C_q^i A^{q-i}\mu^{(i)}(0),\ \ q = 0,1,...,m, \quad (4)$$

где $A = (a_1b_2 + a_2b_1)/(a_1+a_2)$, $B = (b_2 - b_1)/(a_1+a_2)$, $f^{(n,m)}(x,t) = \partial^{n+m} f(x,t)/\partial x^n\partial t^m$.

Рассмотрим сумму, которая присутствует в (4) при $q = m$

$$K_m(x) = \alpha(0)\sum_{j=0}^{m-1} a_2^j\Big\{\sum_{p=0}^{j}\sum_{s=0}^{i-j-1} C_j^p C_{i-j-1}^s A^{i-j-s-1}(-B)^{j-p} f^{(p,s)}(x,t)\Big\}\Big|_{t=0}, \quad m \geqslant 2. \quad (5)$$

Определение 1. Числа $K_m(0)$ из (5) при $f(x,t) = f_0(x,t)$ и $x = 0$ называются *критериальными значениями* производных от f порядка $m-1$ в (4) при $q = m$ и целых $m \geqslant 2$ для пределов $f_0(x,t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,t)$ функций $f_n(x,t) \in C^m(G_\infty)$ по норме соответствующего банахова пространства функций $f_0(x,t) \in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющих (7), (8) и

$$\alpha(t)\frac{\partial^m}{\partial t^m}\biggl(\int\limits_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)d\tau\biggr)\in C(\mathbb{R}_+). \tag{6}$$

Теорема. *Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты* α, β, $\gamma \in C^m(\mathbb{R}_+)$ *и характеристическая первая косая производная, т.е.* $a_1\alpha(t) = \beta(t)$, $\gamma(t) \neq b_1\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$. *Для того, чтобы смешанная задача (1)–(3) на* $\dot{G}_\infty$ *имела единственное и устойчивое по* φ, ψ, f, μ *гладкое решение* $u \in C^m(G_\infty)$ *необходимо и достаточно требований гладкости (6),*

$$\varphi\in C^m(\mathbb{R}_+),\ \psi\in C^{m-1}(\mathbb{R}_+),\ f\in C^{m-2}(G_\infty),\ \mu\in C^m(\mathbb{R}_+).$$

$$\alpha\,(t)\,\varphi^{(m+1)}(a_2t)\,,\ \alpha\,(t)\,\psi^{(m)}(a_2t)\in C(\mathbb{R}_+),\ \int\limits_0^t f\bigl(x+a_2(t-\tau),\tau\bigr)\,d\tau\in C^{m-1}(G_\infty), \tag{7}$$

$$\bigl[1-(-1)^i(a_2/a_1+1)\bigr]\int\limits_0^{t_i(x)} f\bigl(x_i(t,\tau),\tau\bigr)\,d\tau+\int\limits_{t_i(x)}^t f\bigl(x-a_1(t-\tau),\tau\bigr)\,d\tau\in C^{m-1}(G_\infty),\ \ i=1,2, \tag{8}$$

должны выполняться условия согласования (4) с критериальными значениями $K_m(0)$. *Гладким решением* $u \in C^m(G_\infty)$ *характеристической задачи (1)–(3) на* $\dot{G}_\infty$ *является функция:*

$$u(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\biggl\{a_1e^{-b_2t}\varphi(x+a_2t) + a_2e^{-b_1t}\varphi(x-a_1t) +$$

$$+\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t} e^{B(x-s)-At}[A\varphi(s)+\psi(s)]\,ds + e^{Bx-At}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\biggr\},\ \ (x,t)\in G_-,$$

$$u(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\biggl\{a_1e^{-b_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)}\Bigl[e^{-b_2x/a_1}\varphi(x+a_2t) - e^{-b_1x/a_1}\varphi\Bigl(a_2\Bigl(t-\frac{x}{a_1}\Bigr)\Bigr)\Bigr]+$$

$$+\int\limits_{a_2t_2(x)}^{x+a_2t} e^{B(x-s)-At}\,[A\varphi(s)+\psi(s)]\,ds\biggr\} + \frac{e^{-b_1x/a_1}}{\gamma(t-x/a_1)-b_1\alpha(t-x/a_1)}\times$$

$$\times\Bigl\{\mu(t-x/a_1) - e^{-b_2(t-x/a_1)}\alpha(t-x/a_1)\Bigl[a_1\varphi'\Bigl(a_2(t-x/a_1)\Bigr) + b_1\varphi\Bigl(a_2(t-x/a_1)\Bigr)+$$

$$+\psi\Bigl(a_2(t-x/a_1)\Bigr) + \int\limits_0^{t_0(x)} e^{b_2\tau}f(x_2(t,\tau),\tau)\,d\tau\Bigr]\Bigr\}+$$

$$+\frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2}\left\{\int\limits_0^{t_2(x)}\int\limits_{x_2(t,\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau+\int\limits_{t_2(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\right\},\ (x,t)\in G_+.$$

$$t_i(x)=(-1)^i\left[t-(x/a_1)\right],x_i(t,\tau)=\Big[1-(-1)^i\left((a_2/a_1)+1\right)\Big](x-a_1t)-a_2\tau.$$

Эта работа ведётся в рамках проекта НИР 1.2.02.3 ГПНИ "Конвергенция-2025".

Литература

1. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. *Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии* // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2018. № 4(101). С. 18–28.

2. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. *Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 1. С. 30–37.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА ПСЕВДОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ

А.Р. Хашимов

Пусть $x\in D\subset R_x^n$, $y\in\Omega\subset R_y^m=\{y:y_1>0\}$, $0<t<T$, $Q=D\times\Omega\times(0,T)$. D – ограниченная, а Ω – неограниченная область, с гладкими границами Γ_1 и Σ соответственно.

В неограниченной области рассмотрим уравнение

$$L_0lu+L_1u+Mu=f(x,y,t), \tag{1}$$

где

$$lu=u_t+\alpha^k(x,y,t)u_{x_k},\ \ L_1u=b^{ij}(x,y,t)u_{x_ix_j}+b^i(x,y,t)u_{x_i},$$
$$L_0u=u_t-a^{ij}(x,y,t)u_{x_ix_j}+a^i(x,y,t)u_{x_i}+a(x,y,t)u,$$
$$L_1u=c^{pq}(x,y,t)u_{x_px_q}+b^p(x,y,t)u_{x_p}+c(x,y,t)u.$$

Предположим, что коэффициенты этих операторов удовлетворяют условиям

$$a^{ij}=a^{ji},\ \lambda_0|\xi|^2\leqslant a^{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\lambda_1|\xi|^2,\quad (x,y,t)\in Q\cup\partial Q,\quad \xi\in\mathbb{R}^{n+m+1},$$

$$c^{pq}=c^{pq},\ \gamma_0|\xi|^2\leqslant c^{pq}\xi_p\xi_q\leqslant\gamma_1|\xi|^2,\quad (x,y,t)\in Q\cup\partial Q,\quad \xi\in\mathbb{R}^{n+m+1}.$$

Пусть $G=D\times\Omega$. Будем предполагать, что в некоторой окрестности любой своей точки гиперповерхность ∂G представима в виде

$$x_j=\chi(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n),\ y_k=\chi_1(y_1,...,y_{k-1},y_{k+1},...,y_m)$$

при каких-либо j, k, где χ и χ_1 являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями.

Рассмотрим уравнение (1) с краевым условием

$$u|_{\partial Q}=0,\quad \alpha^ku_{x_k}|_{\sigma_2}=0. \tag{2}$$