$$+\frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2}\left\{\int\limits_0^{t_2(x)}\int\limits_{x_2(t,\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau+\int\limits_{t_2(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\right\},\ (x,t)\in G_+.$$

$$t_i(x)=(-1)^i\left[t-(x/a_1)\right], x_i(t,\tau)=\Big[1-(-1)^i\left((a_2/a_1)+1\right)\Big](x-a_1t)-a_2\tau.$$

Эта работа ведётся в рамках проекта НИР 1.2.02.3 ГПНИ "Конвергенция-2025".

Литература

1. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. *Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии* // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2018. № 4(101). С. 18–28.

2. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. *Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 1. С. 30–37.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА ПСЕВДОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ

А.Р. Хашимов

Пусть $x\in D\subset R^n_x$, $y\in\Omega\subset R^m_y=\{y:y_1>0\}$, $0<t<T$, $Q=D\times\Omega\times(0,T)$. D – ограниченная, а Ω – неограниченная область, с гладкими границами Γ_1 и Σ соответственно.

В неограниченной области рассмотрим уравнение

$$L_0lu+L_1u+Mu=f(x,y,t), \tag{1}$$

где

$$lu=u_t+\alpha^k(x,y,t)u_{x_k},\ \ L_1u=b^{ij}(x,y,t)u_{x_ix_j}+b^i(x,y,t)u_{x_i},$$
$$L_0u=u_t-a^{ij}(x,y,t)u_{x_ix_j}+a^i(x,y,t)u_{x_i}+a(x,y,t)u,$$
$$L_1u=c^{pq}(x,y,t)u_{x_px_q}+b^p(x,y,t)u_{x_p}+c(x,y,t)u.$$

Предположим, что коэффициенты этих операторов удовлетворяют условиям

$$a^{ij}=a^{ji},\ \lambda_0|\xi|^2\leqslant a^{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\lambda_1|\xi|^2,\quad (x,y,t)\in Q\cup\partial Q,\quad \xi\in\mathbb{R}^{n+m+1},$$
$$c^{pq}=c^{pq},\ \gamma_0|\xi|^2\leqslant c^{pq}\xi_p\xi_q\leqslant\gamma_1|\xi|^2,\quad (x,y,t)\in Q\cup\partial Q,\quad \xi\in\mathbb{R}^{n+m+1}.$$

Пусть $G=D\times\Omega$. Будем предполагать, что в некоторой окрестности любой своей точки гиперповерхность ∂G представима в виде

$$x_j=\chi(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n),\ y_k=\chi_1(y_1,...,y_{k-1},y_{k+1},...,y_m)$$

при каких-либо $j,\ k,$ где χ и χ_1 являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями.

Рассмотрим уравнение (1) с краевым условием

$$u|_{\partial Q}=0,\quad \alpha^ku_{x_k}|_{\sigma_2}=0. \tag{2}$$

Здесь $\sigma_2 = \{(x,y,t) \in \partial G \times (0,T) : \alpha^k \nu_k < 0\}$, ν_k – вектор внутренней нормали к ∂G в точке (x,y).

Отметим, что для обобщенного решения задачи (1), (2) нами были установлены энергетические оценки типа принципа Сен-Венана, с помощью которых можно исследовать асимптотические свойства решений задачи в бесконечно удаленной точке границы (см. [1]). Если область ограничена, то задача (1), (2) была исследована в работе [2]. Здесь мы установим энергетические оценки специального вида, с помощью которых можно доказать теорему о существовании решения задачи в неограниченной области.

Пусть $\{Q_\tau\}$ – семейство конечных подобластей области Q, зависящее от параметра $\tau \in \Pi = \{\tau : 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0\}$, $\tau_0 \leqslant \infty$. Будем предполагать, что S_τ – связная $(n+m)$-мерная поверхность, обладающая той же гладкостью, что и ∂Q, а ее граница – $\partial S_\tau \subset \partial Q$.

Положим

$$\Gamma_\tau = \partial G \cap \partial G_\tau, \quad \sigma_{0,\tau} = \{(x,y,t) \in \Gamma_\tau \times (0,T) : \alpha^k \nu_k = 0\},$$

$$\sigma_{1,\tau} = \big\{(x,y,t) \in \Gamma_\tau \times (0,T) : \alpha^k \nu_k > 0\big\}, \quad \sigma_{2,\tau} = \big\{(x,y,t) \in \Gamma_\tau \times (0,T) : \alpha^k \nu_k < 0\big\}.$$

Для некоторого $h > 0$ определим

$$\sigma_{1,h,\tau} = \Big\{(x,y,t) \in \sigma_{1,\tau} : \rho\big((x,y,t), \partial\sigma_{1,\tau}\big) > h\Big\}, \quad \sigma^h_{1,\tau} = \sigma_{1,\tau} \backslash \sigma_{1,h,\tau}.$$

Пусть $E(Q_\tau)$ есть множество функций $v \in C^2(Q_\tau)$ таких, что $v = 0$ на Γ и для некоторого числа $h > 0$ будет $l_0 = 0$ на $\sigma_{0,\tau} \cup \sigma^h_{1,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}$.

Пусть $H(Q_\tau)$ – гильбертово пространство, полученное пополнением $E(Q_\tau)$ по норме

$$\|u\|_{H(Q_\tau)} = \Bigg\{ \int\limits_{Q_\tau} (d_1^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u_{x_p} u_{x_q} + u_t^2 + u^2) dx - \int\limits_{\sigma_{2,\tau}} \alpha^k \nu_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \Bigg\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказана следующая теорема, с помощью которой можно построить обобщенное решение задачи (1), (2) в классах функций, растущих на бесконечности.

Теорема. *(Аналог принципа Сен-Венана). Пусть*

$$-1 \leqslant a^{ij}_{x_k} + a^i + a \leqslant 0, \quad \theta \equiv d - \frac{1}{2} d^{ij}_{x_i x_j} + \frac{1}{2} d^i_{x_i} - \frac{1}{2} c^{pq}_{y_p y_q} + \frac{1}{2} c^p_{y_p} - c < 0.$$

Если функция $u(x,y,t)$ является обобщенным решением задачи (1), (2) в области Q и $f(x,y,t)$ в G_{τ_0}. Тогда при любых $0 \leqslant R_0 \leqslant R$ имеет место оценка

$$\int\limits_{\Omega_{\tau(R_0)}} E(u) E(u)\, dx \leqslant \exp\left[-(R - R_0)\right] \int\limits_{\Omega_{\tau(R)}} E(u)\, dx.$$

Здесь

$$E(u) = d^{ij} u_{x_i x_j} + c^{pq} u_{y_p y_q} + u_t^2 - \theta u^2,$$

$$d^{ij} = d^{ji}, \quad \beta_0 |\xi|^2 \leqslant d^{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \beta_1 |\xi|^2, \quad (x,y,t) \in Q \cup \partial Q, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+m+1}.$$

Литература

1. Khashimov A.R., Smetanova D. *On the Uniqueness Classes of Solutions of Boundary Value Problems for Third-Order Equations of the Pseudo-Elliptic Type.* Axioms. 2020. 9.80.

2. Кожанов А.И. *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка.* Новосибирск, 1990.