СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Е.С. Чеб

В работе рассматривается корректно поставленная граничная задача для линейного уравнения в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами, содержащего младшие производные, в случае наличия у него одной кратной характеристики. Методом характеристик построено единственное классическое решение в явном виде при выполнении условий согласования начальных и граничных условий.

В полуполосе $Q = [0,\infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции

$$u : \overline{Q} = [0,\infty) \times \overline{\Omega} \ni (t,x) \to u(t,x),$$

где $\overline{\Omega}$ – замыкание области $\Omega = (0,l)$, рассмотрим гиперболическое уравнение четвертого порядка вида

$$\prod_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial}{\partial x} + b \right) u(t,x) = f(t,x), \quad a_i = a > 0,\ b > 0, \quad t > 0,\ x \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 0,1,2,3, \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Уравнение (1) имеет одну характеристику $x + at$ кратности четыре. В этом случае граничные условия для (1) задаются не на всей границе.

Добавим к уравнению (1) граничные условия вида

$$\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\Big|_{x=0} = \mu_s(t), \quad t > \frac{l}{a}, \quad s = 0,1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\Big|_{x=l} = \nu_s(t), \quad t > 0, \quad s = 0,1. \tag{4}$$

Обратим внимание, что условие (4) задается не на всей границе $x = 0$, а только на части. Выбор таких граничных условий гарантирует корректность по Адамару задачи (1) – (4) в классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций [1].

Заменой $u(t,x) = e^{-bt} v(t,x)$ задача (1)–(4) сводится к граничной задаче, рассмотренной в работе [2], но для неоднородного уравнения. В [2] предложен алгоритм вывода достаточных условий существования классического решения и условия согласования начальных и граничных функций.

Решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(t,x) = e^{-bt} \big(g_1(x+at) + t\, g_2(x+at) + t^2\, g_3(x+at) + t^3\, g_4(x+at) \big) + F_0(t,x), \tag{5}$$

где g_1, g_2, g_3 и g_4 – любые функции из $C^4(\mathbb{R})$ аргумента $x + at$, функции $g_i : [0,\infty) \to g_i(y) \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $F_0(t,x)$ – частное решение уравнения (1),

$$F_0(t,x) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{6} e^{b\tau} f(\tau, x - a(t-\tau))\, d\tau.$$

Требуется определить общий вид функций g_i $(i = 1,2,3,4)$ в представлении (5) при условии, что будут выполняться начальные (2) и граничные (3), (4) условия.

Литература

1. Чеб Е. С. *Классическое решение смешанной задачи для линейного гиперболического уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками* // Вестник ГГУ. Сер. 2. 2017. Т. 7. № 3. С. 33–41.

2. Чеб Е. С. *О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой* // Прикладная математика & Физика. 2020. Т. 1. № 1. С. 11–18.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Шилинец

Для изучения дифференциальных уравнений используются разные методы. Одним из таких методов является метод функций, моногенных в смысле В. С. Федорова (F-моногенных) [1-9].

В данной работе с помощью F-моногенных дуальных функций исследуется краевая задача для следующей системы дифференциальных уравнений в формальных производных [10]:

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = g(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = h(x,y), \tag{1}$$

где g, h – заданные комплексные или действительные функции класса $C^1(D)$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy, \quad i^2 = -1.$$

Определение 1. *Дуальной функцией в области* D называется функция вида

$$F(z) = f(z) + \varepsilon\varphi(z), \quad z \in D, \quad \varepsilon^2 = 0,$$

где $f(z)$, $\varphi(z)$ — комплексные или действительные функции, заданные в области D.

Определение 2. Дуальная функция $F(z)$ называется *F-моногенной* (*моногенной в смысле В. С. Федорова*) [1] по дуальной функции $P(z) = p(z)+\varepsilon q(z)$ в области D, если найдется такая дуальная функция ψ, что во всех точках области D имеем $dF=\psi dP$.

Функция ψ иногда обозначается $\psi = F'[P]$ и называется *F-производной функции F по функции P.*

Легко убедиться в том, что решением системы дифференциальных уравнений в формальных производных вида

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

в области D являются следующие функции: $f = f(z)$ – произвольная аналитическая функция от z в области D, $\varphi = f'(z)\overline{z} + h(z)$ – так называемая *бианалитическая в области D функция* [11].

Естественный интерес вызывает изучение системы дифференциальных уравнений в формальных производных (1).

Введем сейчас дуальные функции

$$w = w(z) = f(x,y) + \varepsilon\varphi(x,y), \quad P = z + \varepsilon\overline{z}, \quad Q = \overline{z}\ (\varepsilon^2 = 0),$$