Литература

1. Чеб Е. С. *Классическое решение смешанной задачи для линейного гиперболического уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками* // Вестник ГГУ. Сер. 2. 2017. Т. 7. № 3. С. 33–41.

2. Чеб Е. С. *О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой* // Прикладная математика & Физика. 2020. Т. 1. № 1. С. 11–18.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Шилинец

Для изучения дифференциальных уравнений используются разные методы. Одним из таких методов является метод функций, моногенных в смысле В. С. Федорова (F-моногенных) [1-9].

В данной работе с помощью F-моногенных дуальных функций исследуется краевая задача для следующей системы дифференциальных уравнений в формальных производных [10]:

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = g(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = h(x,y), \tag{1}$$

где $g,\ h$ – заданные комплексные или действительные функции класса $C^1(D)$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy, \quad i^2 = -1.$$

Определение 1. *Дуальной функцией в области* D называется функция вида

$$F(z) = f(z) + \varepsilon\varphi(z), \quad z \in D, \quad \varepsilon^2 = 0,$$

где $f(z),\ \varphi(z)$ — комплексные или действительные функции, заданные в области D.

Определение 2. Дуальная функция $F(z)$ называется *F-моногенной* (*моногенной в смысле В. С. Федорова*) [1] по дуальной функции $P(z) = p(z)+\varepsilon q(z)$ в области D, если найдется такая дуальная функция ψ, что во всех точках области D имеем $dF = \psi dP$.

Функция ψ иногда обозначается $\psi = F'[P]$ и называется *F-производной функции* F *по функции* P.

Легко убедиться в том, что решением системы дифференциальных уравнений в формальных производных вида

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

в области D являются следующие функции: $f = f(z)$ – произвольная аналитическая функция от z в области D, $\varphi = f'(z)\overline{z} + h(z)$ – так называемая *бианалитическая в области* D *функция* [11].

Естественный интерес вызывает изучение системы дифференциальных уравнений в формальных производных (1).

Введем сейчас дуальные функции

$$w = w(z) = f(x,y) + \varepsilon\varphi(x,y), \quad P = z + \varepsilon\overline{z}, \quad Q = \overline{z}\ (\varepsilon^2 = 0),$$

а также дуальный дифференциальный оператор $\dfrac{\partial w}{\partial Q} = \dfrac{\partial w}{\partial \overline{z}} - \varepsilon \dfrac{\partial w}{\partial z}$. Тогда систему (1) можно, очевидно, записать в виде

$$\frac{\partial w(z)}{\partial Q} = A(z), \tag{2}$$

где $h(z) = h(x,y),\ g(z) = g(x,y),\ A(z) = h(z) - \varepsilon g(z)$.

Исследуем следующую **краевую задачу:** найти решение $w = w(z) \in C^1(D)$ уравнения (2) (системы (1)), если известны значения этого решения на границе C области $D_C \subset D$.

Если применить метод, используемый в работе [12] для исследования систем дифференциальных уравнений в частных производных, то получим, что система (1) будет эквивалентной в любой области $D_C \subset D$ следующему интегральному уравнению:

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C w(z) \frac{dP}{P - P_0} - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{D_C} A(z) \frac{dxdy}{P - P_0}, \tag{3}$$

где C – граница области D_C,

$$P_0 = z_0 + \varepsilon \overline{z}_0, \quad z_0 \in D_C, \quad P = P(z) = z + \varepsilon \overline{z}, \quad A(z) = h(z) - \varepsilon g(z), \quad z \in C.$$

Полученное интегральное представление (3) и дает решение сформулированной краевой задачи.

Литература

1. Федоров В. С. *Основные свойства обобщённых моногенных функций* // Известия вузов. Математика. 1958. № 6. С. 257–265.

2. Павлов С. Д. *Решение систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными с помощью моногенных функций в смысле В.С. Федорова* // Anal. stiint. Univ. Iasi. 1962. T. 8. F. 2. P. 323–329.

3. Стельмашук Н. Т. *О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных* // Сибирский математический журнал. 1964. Т. 5. № 1. С. 166–173.

4. Кусковский Л. Н. *О краевой задаче типа Римана-Гильберта* // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 3. С. 52–532.

5. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. *Метод формальных производных для решения задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных* // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 11. С. 2019–2020.

6. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. *Решение краевой задачи для одной системы дифференциальных уравнений в формальных производных* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 127–128.

7. Stelmashuk N. T., Shylinets V. A. *The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators* // Труды Института математики НАН Беларуси. 2004. Т. 12. № 2. С. 170–171.

8. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. *О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 2. С. 61–65.

9. Шылінец У. А., Гуло І. М. *Даследаванне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных пры дапамозе F-манагенных гіперкамплексных функцый* // Весці БДПУ. Серыя 3. 2019. № 4. С. 5–8.

10. Гусев В. А. *Об одном обобщении ареолярных производных* // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara. 1962. T. 7. F. 2. P. 223–238.

11. Затуловская К. Д. *Полианалитические функции и функции, моногенные в смысле В. С. Фёдорова* // Смоленский матем. сборник. 1969. Т. 2. В. 20. С. 20–27.

12. Стельмашук Н. Т. *Интегральное представление решений одной системы уравнений в частных производных* // Смоленский матем. сборник. 1970. Т. 3. В. 23. С. 33–38.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE AIRY EQUATION ON LADDER TYPE METRIC GRAPH

M.I. Akhmedov, Z.A. Sobirov

We consider Airy type evolution equation on ladder type metric graph (fig. 1).

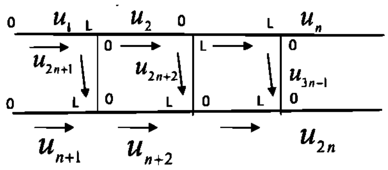

Fig. 1. Ladder type metric graph.

The bonds of the graph denoted by B_j, $j=\overline{1,3n-1}$, as it is show n in fig. 1.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}\right)u_j(x_j,t)=f_j(x,t),\quad t>0,\quad x_j\in B_j,\quad j=\overline{1,3n-1}. \tag{1}$$

$$b_k u_k(L,t)=a_{k+1}u_{k+1}(0,t)=a_{2n+k}u_{2n+k}(0,t),$$

$$u_1(0,t)=\phi_1(t), u_n(L,t)=\phi_2(t), \tag{2}$$

$$d_k u_k(L,t)=c_{k+1}u_{(k+1)x}(0,t)=c_{2n+k}u_{(2n+k)x}(0,t),$$

$$u_{1x}(0,t)=\delta_1(t), \tag{3}$$

$$\frac{1}{b_k}u_{kxx}(L,t)=\frac{1}{a_{k+1}}u_{(k+1)xx}(0,t)+\frac{1}{a_{2n+k}}u_{(2n+k)xx}(0,t), \tag{4}$$

$$b_{n+k}u_{n+k}(L,t)=a_{n+k+1}u_{n+k+1}(0,t)=a_{2n+k}u_{2n+k}(L,t),$$

$$u_{n+1}(0,t)=\phi_3(t), u_{2n}(L,t)=\phi_4(t), \tag{5}$$

$$c_{n+k+1}u_{(n+k+1)x}(0,t)=d_{2n+k}u_{(2n+k)x}(L,t)+d_{n+k+1}u_{(n+k+1)x}(L,t),$$

$$u_{(n+1)x}(0,t)=\delta_2(t), \tag{6}$$

$$\frac{1}{b_{n+k}}u_{(n+k)xx}(L,t)=\frac{1}{a_{n+k+1}}u_{(n+k+1)xx}(0,t)+\frac{1}{a_{2n+k}}u_{(2n+k)xx}(L,t), \tag{7}$$

for $0<t<T$, $T=$ const. Furthermore, we assume that the functions $f_j(x,t)$, $j=\overline{1,3n-1}$, are smooth enough hand bounded. The initial conditions are given by:

$$u_j(x,0)=u_{0,j}(x),\quad x\in\overline{B_j},\quad j=\overline{1,3n-1}. \tag{8}$$

It should be noted that the above vertex conditions are not the only possible ones. The main motivation for our choice is caused by the fact that they guarantee uniqueness of the solution and, if the solutions decay (to zero) at infinity, the norm (energy) conservation.