имеют неинтегрируемые особенности. Для них в качестве аппроксимаций $u_\varepsilon(x)$ рассматриваются решения задачи Коши с такими начальными условиями, при которых они являются гладкими функциями.

Литература

1. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.
2. Антоневич А. Б., Шагова Т. Г. *Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом* // Таврический Вестник Информатики и Математики. 2019. № 3. С. 23–36.
3. Антоневич А. Б., Шагова Т. Г. *Умножение распределений и алгебры мнемофункций* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65. № 3. С. 339–389.
4. Антоневич А. Б., Кузьмина Е. В. *Решения дифференциального уравнения* $u' + \frac{s}{x}u = 0$ *в пространстве распределений* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 56—66.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И РАЗНОСТНОЙ ТРАКТОВКАХ РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

З.В. Бештокова

1. Постановка задачи и априорная оценка в дифференциальной форме.

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \,:\, 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int\limits_0^t K(x,t,\tau)u(x,\tau)\,d\tau = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}u - \mu_{-\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\[2ex] -k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}u - \mu_{+\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x,t)u,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1,\ |r_\alpha(x,t)|,\ |k_{x_\alpha}(x,t)|,\ |r_{x_\alpha}(x,t)|,\ |q_\alpha(x,t)|,\ |\beta_{\pm\alpha}(x,t)| \leqslant c_2,$$

$$k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}\left(\overline{Q}_T\right),\ r_\alpha(x,t),\ q_\alpha(x,t),\ K(x,t,\tau),\ f(x,t) \in C^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t, \tag{4}$$

$$c_0, c_1, c_2 - \text{положительные постоянные}, \quad \alpha = 1,2,...,p, \quad Q_T = G \times (0 < t \leqslant T].$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения и граничных условий (1)–(3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x,t)$ в цилиндре $\overline{Q}_T$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4), тогда для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_0^2 \leq M(T)\Bigg(\int\limits_0^t \Bigg(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G'}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Bigg)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2\Bigg),$$

где $M(T)$ зависит только от входных данных задачи (1)-(3).

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы.

В замкнутой области $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\}, \quad \overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, m,\ m\tau = T\},$$

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha}, \quad \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)-(3) поставим в соответствие разностную схему, порядка аппроксимации $O\big(|h| + \tau\big)$:

$$y_{\overline{t}} + \sum_{j'=0}^{j} K(x, t_j, t_{j'})y(x, t_{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau = \Lambda(\widetilde{t})y + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha,0} = \beta_{-\alpha}\, y_0 - \mu_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \\ -a_{+\alpha} y_{\overline{x}_\alpha, N_\alpha} = \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha} - \mu_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \tag{6}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{7}$$

где $\Lambda(\widetilde{t}) = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(\widetilde{t}), \quad \Lambda_\alpha(\widetilde{t})y_{(\alpha)} = \big(a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha}\big)_{x_\alpha} + r_\alpha^+ y_{x_\alpha} + r_\alpha^- y_{\overline{x}_\alpha} - d_\alpha y,$

$$y_{\overline{x}_\alpha} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_\alpha}, \ \ y_{x_\alpha} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\alpha}, \ \ y_{\overline{t}} = \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau}, \ \ y = y^j,\ \check{y} = y^{j-1},\ a_\alpha = k_\alpha(x^{-0.5\alpha}, \widetilde{t}_j),$$

$$d_\alpha = q_\alpha(x, \widetilde{t}_j), \quad \varphi_i = f(x, \widetilde{t}_j),\ r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \quad |r_\alpha| = r_\alpha^+ - r_\alpha^-, \quad r_\alpha^+ = 0.5(r_\alpha + |r_\alpha|) \geqslant 0,$$

$$r_\alpha^- = 0.5(r_\alpha - |r_\alpha|) \leqslant 0, \quad x^{-0.5\alpha} = x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p,$$

$$\widetilde{t} = (j + 0.5)\tau = t_j + 0.5\tau = t_{j+0.5}, \quad t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha\tau}{p} = \left(j + \frac{\alpha}{p}\right)\tau, \quad \tau, h - \text{шаги сетки.}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (4), тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий для решения разностной задачи (5)–(7) при малом $\tau \leqslant \tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ справедлива априорная оценка*

$$\|y^j\|^2 \leqslant M\left(\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\varphi\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta \neq i_\alpha}\big(\mu_{+\alpha}^2 + \mu_{-\alpha}^2\big)\, H/h_\alpha\right)\tau + \|y^0\|^2\right) \tag{8}$$

на каждом временном слое в сеточной норме $L_2(G)$, где M – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Таким образом, доказаны единственность и устойчивость решения разностной задачи (5)–(7) по начальным данным и правой части в сеточной норме $L_2(G)$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1)–(3), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ – решение разностной задачи (5)–(7). Обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность аппроксимации, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в (5)–(7), получим задачу для z :

$$z_{\overline{t}} + \sum_{j'=0}^{j} K(x,t_j,t_{j'}) z(x,t_{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau = \Lambda(\widetilde{t})z + \Psi, \quad (x,t)\in\omega_{h\tau}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha,0} = \beta_{-\alpha} z_0 - \nu_{-\alpha}, & x=0, \\ -a_{+\alpha} z_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha} = \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha} - \nu_{+\alpha}, & x=l_\alpha, \end{cases} \tag{10}$$

$$z(x,0)=0, \quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{11}$$

где $\Psi = O\big(|h|+\tau\big)$, $\nu_{-\alpha} = O\big(|h|+\tau\big)$, $\nu_{+\alpha} = O\big(|h|+\tau\big)$ – погрешности аппроксимации на решении задачи (1)–(3).

Применяя априорную оценку (8) к решению задачи (9)–(11), получим

$$\|z^j\|^2 \leqslant M \sum_{j'=1}^{j} \left(\|\psi^{j'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta\neq i_\alpha} \left(\nu_{+\alpha}^2 + \nu_{-\alpha}^2\right) H/h_\alpha \right)\tau, \tag{12}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от |h| и τ, где $|h| = h_1+h_2+...+h_p$.

Из априорной оценки (12) следует сходимость схемы (5)–(7) со скоростью $O(|h|+\tau)$ в сеточной норме $L_2(G)$.

Литература

1. Андреев В. Б. *О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 6. С. 1218–1231.

2. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1983.

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

А.В. Васильев, В.Б. Васильев, А.А. Ходырева

В работе рассматривается одна дискретная краевая задача, порожденная дискретным эллиптическим псевдодифференциальным оператором, устанавливается ее однозначная разрешимость в дискретном пространстве Соболева–Слободецкого и описываются ее аппроксимационные свойства.

Пусть $\mathbb{Z}^2$ – целочисленная решетка на плоскости. Обозначим

$$K = \{x\in\mathbb{R}^2 \,:\, x=(x_1,x_2),\ x_1>0,\ x_2>0\}$$

первый квадрант на плоскости, $k_s = h\mathbb{Z}^2\cap K$, $h>0$. Введем пространство функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x})$, $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\in h\mathbb{Z}^2$.

Обозначим $\mathbb{T}^2$ квадрат $[-\pi,\pi]^2$, $h>0$, $\hbar = h^{-1}$. Будем рассматривать функции, изначально заданные в квадрате, как периодические функции, определенные на всей плоскости $\mathbb{R}^m$ с основным квадратом периодов $\mathbb{T}^2$.

Для таких функций можно определить дискретное преобразование Фурье формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi\in\hbar\mathbb{T}^2,$$