Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1)–(3), $y(x_i,t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (5)–(7). Обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность аппроксимации, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в (5)–(7), получим задачу для z:

$$z_{\bar{t}} + \sum_{j'=0}^{j} K(x,t_j,t_{j'})z(x,t_{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau = \Lambda(\widetilde{t})z + \Psi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha,0} = \beta_{-\alpha}\, z_0 - \nu_{-\alpha}\,, & x = 0, \\ -a_{+\alpha} z_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha} = \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha} - \nu_{+\alpha}\,, & x = l_\alpha, \end{cases} \tag{10}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{11}$$

где $\Psi = O\big(|h| + \tau\big)$, $\nu_{-\alpha} = O\big(|h| + \tau\big)$, $\nu_{+\alpha} = O\big(|h| + \tau\big)$ – погрешности аппроксимации на решении задачи (1)–(3).

Применяя априорную оценку (8) к решению задачи (9)–(11), получим

$$\|z^j\|^2 \leqslant M \sum_{j'=1}^{j} \left(\|\psi^{j'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\nu_{+\alpha}^2 + \nu_{-\alpha}^2\right) H/h_\alpha \right)\tau, \tag{12}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от |h| и τ, где $|h| = h_1 + h_2 + \ldots + h_p$.

Из априорной оценки (12) следует сходимость схемы (5)–(7) со скоростью $O(|h|+\tau)$ в сеточной норме $L_2(G)$.

Литература

1. Андреев В. Б. *О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 6. С. 1218–1231.

2. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1983.

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

А.В. Васильев, В.Б. Васильев, А.А. Ходырева

В работе рассматривается одна дискретная краевая задача, порожденная дискретным эллиптическим псевдодифференциальным оператором, устанавливается ее однозначная разрешимость в дискретном пространстве Соболева–Слободецкого и описываются ее аппроксимационные свойства.

Пусть $\mathbb{Z}^2$ – целочисленная решетка на плоскости. Обозначим

$$K = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = (x_1, x_2),\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$$

первый квадрант на плоскости, $k_s = h\mathbb{Z}^2 \cap K$, $h > 0$. Введем пространство функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$.

Обозначим $\mathbb{T}^2$ квадрат $[-\pi,\pi]^2$, $h > 0$, $\hbar = h^{-1}$. Будем рассматривать функции, изначально заданные в квадрате, как периодические функции, определенные на всей плоскости $\mathbb{R}^m$ с основным квадратом периодов $\mathbb{T}^2$.

Для таких функций можно определить дискретное преобразование Фурье формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

в случае сходимости такого ряда, и функция $\tilde{u}_d(\xi)$ будет периодической функций в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$.

С помощью разделенных разностей и их дискретных преобразований Фурье мы определим дискретные пространства Соболева–Слободецкого для исследования разрешимости широкого класса дискретных уравнений. Вводится *дискретный аналог пространства Шварца* и обозначение

$$\zeta^2 = h^{-2}\big((e^{-ih\cdot\xi_1} - 1)^2 + (e^{-ih\cdot\xi_2} - 1)^2\big).$$

Определение 1. *Пространство* $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит их дискретных (обобщенных) функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ по норме

$$||u_d||_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} (1+|\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2}.$$

Пространство $H^s(K_d)$ состоит их дискретных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, чьи носители содержатся в $\overline{K_d}$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$.

Если $\widetilde{A}_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция в $\mathbb{R}^2$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$, то мы называем ее *символом.*

Определение 2. *Дискретным псевдодифференциальным оператором* A_d *с символом* $\widetilde{A}_d(\xi)$ *в дискретном квадранте* K_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi)\, d\xi, \quad \tilde{x}\in K_d.$$

Говорят, что *оператор* A_d – *эллиптический*, если

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^2} |\widetilde{A}_d(\xi)| > 0.$$

Мы будем рассматривать класс символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \leqslant |\tilde{A}_d(\xi)| \leqslant c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Мы исследуем разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x}\in K_d, \tag{1}$$

в пространстве $H^s(K_d)$ с граничными условиями

$$\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h = f_d(\tilde{x}_2), \quad \sum_{\tilde{x}_2\in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h = g_d(\tilde{x}_1), \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}_{++}} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h^2 = 0. \tag{2}$$

При наличии специальной периодической волновой факторизации символа $\tilde{A}_d(\xi)$ с индексом æ таким, что $æ - s = 1+\delta$, $|\delta| < 1/2$, можно отметить следующий факт.

Теорема 1. *Пусть* f_d, $g_d \in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z})$ *. Тогда дискретная краевая задача (1), (2) имеет единственное решение с априорной оценкой*

$$||u_d||_s \leqslant \mathrm{const}(||f_d||_{s+1/2} + ||g_d||_{s+1/2})$$

с постоянной, не зависящей от h.

Континуальный аналог – это следующая краевая задача

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)\,dx_1 = f(x_2), \quad \int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)\,dx_2 = g(x_1), \quad \int\limits_K u(x)\,dx = 0, \tag{4}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi|)^\alpha$$

и допускающим волновую факторизацию относительно K с индексом æ таким, что æ$-s = 1+\delta$, $|\delta| < 1/2$. Специальный подбор дискретных функций f_d, g_d и элементов периодической волновой факторизации приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть* $f, g \in S(\mathbb{R})$, æ > 1. *Тогда справедлива следующая оценка для решений* u *и* u_d *континуальной задачи (3), (4) и ее дискретного аналога (1), (2)*

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leqslant C(f, g)h^\beta,$$

где постоянная $C(f, g)$ *зависит от функций* f *и* g, *величина* $\beta > 0$ *может быть произвольной.*

Общие вопросы о разрешимости уравнения (1) были рассмотрены в [1,2], оценки погрешности дискретных решений некоторых других дискретных краевых задач – в [3,4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Литература

1. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space* // Math. Model. Anal. 2018. V. 23. № 3. P. 492–506.

2. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *On some discrete potential like operators* // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 195–212.

3. Васильев В. Б., Тарасова О. А. *О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах* // Итоги науки и техники. Современные математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 174. С. 12–19.

4. Tarasova O. A., Vasilyev V. B. *To the theory of discrete boundary value problems.* 4Open, 2019.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Васильев, В.Б. Васильев, Н.В. Эберлейн

В пространстве Соболева–Слободецкого H^s рассматривается следующая задача: найти функцию

$$U(x) = \begin{cases} u_+(x), & x \in C_+^a, \\ u_-(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a} \end{cases}$$

такую, что $u_+ \in H^s(C_+^a)$, $v_- \in H^s(\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{cases} (Au_+)(x) = 0, & x \in C_+^a, \\ (Au_-)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \end{cases} \tag{1}$$