где $G_1(u, T_1+T_2) = g(u, T_1+T_2) - \langle g(u, T_1+T_2)\rangle$, $G_2(u, T_1+T_2) = \langle g(u, T_1+T_2)\rangle$. Заметим, что из (5) и условия $g(u,T) \geqslant \varepsilon > 0$ следует: $T_2(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Рассмотрим задачу, в некотором смысле предельную при $T_2 \to +\infty$ для задачи (3), (4):

$$\partial_t \widetilde{u} = \Delta \widetilde{u} - \widetilde{f}(\widetilde{u}), \quad \partial_t \widetilde{T}_1 = \Delta \widetilde{T}_1 + \widetilde{G}_1(\widetilde{u}), \tag{6}$$

$$\partial \widetilde{u}/\partial \nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \partial \widetilde{T}_1/\partial \nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{7}$$

где $\widetilde{G}_1(\widetilde{u}) = \widetilde{g}(\widetilde{u}) - \langle \widetilde{g}(\widetilde{u})\rangle$. Начальные данные этой задачи берутся в пространстве

$$E_1 = L_2(\Omega) \times V \subset E.$$

Для любых непустых множеств $X, Y \subset E$ положим $\operatorname{dist}_E(X,Y) = \sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} \|x-y\|_E$.

Методами, изложенными в [2], доказывается, что задача (6), (7) порождает в пространстве E_1 полугруппу операторов $\{\widetilde{S}_t,\ t \geqslant 0\}$, обладающую максимальным аттрактором $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset E_1$. (Следуя [2], *максимальным аттрактором* полугруппы операторов $\{\widetilde{S}_t\}$ называем такое компактное в E_1 и инвариантное относительно операторов полугруппы множество $\mathcal{A}$, что для любого ограниченного в E множества $B \subset E$ $\operatorname{dist}_E(\widetilde{S}_t B, \mathcal{A}) \to 0$ при $t \to +\infty$).

Определим отображения $\Pi_1\colon E \to E_1$ и $\Pi_2\colon E \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\Pi_1\colon (u,T) \to (u, T_1), \quad \Pi_2\colon (u,T) \to T_2$$

для любых $(u,T) \in E$, где $T = T_1 + T_2$, $T_2 = \langle T\rangle$.

Теорема. *Пусть B – ограниченное в E множество. Тогда*

$$\operatorname{dist}_E(\Pi_1 S_t B, \mathcal{A}) \to 0 \quad \textit{и} \quad \inf \Pi_2 S_t B \to +\infty \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$

где $\{S_t\}$ – полугруппа, порожденная в пространстве E задачей (1), (2).

Литература

1. Лионс Ж.–Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир, 1972.
2. Бабин А. В., Вишик М. И. *Аттракторы эволюционных уравнений.* М.: Наука, 1989.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев

В настоящее время активно изучаются краевые задачи с интегральными условиями. Краевые задачи с интегральным условием для гиперболического уравнения были рассмотрены в работе [1]. Гиперболическое уравнение с оператором Бесселя и с нелокальным интегральным условием изучено в работе [2], а параболическое уравнение с оператором Бесселя в работах [3, 4].

Пусть $G_T = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$ – прямоугольная область в координатной плоскости Oxt.

В области G_T рассмотрим параболическое уравнение

$$L_B u \equiv u_t - B_x u = 0,$$

где $B_x = x^{-k}\dfrac{\partial}{\partial x}(x^k\dfrac{\partial}{\partial x}) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{k}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}$ – оператор Бесселя, $0 < k < 1$.

Рассматривается задача о нахождении функции $u(x,t)$, удовлетворяющей условиям:

$$u(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{G}_T) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_T), \tag{1}$$

$$L_B u = 0, \quad (x,t) \in G_T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\left(x^{k-1}u(x,t)\right)\Big|_{x=1} + \int\limits_0^l u(x,t)x dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию согласования

$$\left(x^{k-1}\varphi(x)\right)\Big|_{x=1} + \int\limits_0^l \varphi(x)x dx = 0. \tag{6}$$

Теорема. *Задача (1)–(6) не может иметь более одного решения.*

Литература

1. Пулькина Л. С. *Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода* // Изв. вузов. Матем. 2012. № 4. С. 74-83.

2. Зайцева Н. В. *Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя.* М: Изд-во Московского университета, 2021.

3. Bouziani A., Oussaeif T.-E. and Benaoua L. *A Mixed Problem with an Integral Two-Space-Variables Condition for Parabolic Equation with The Bessel Operator* // Journal of Mathematics. 2013. Article ID 457631.

4. Гарипов И. Б., Мавлявиев Р. М. *Краевая задача для одного параболического уравнения с оператором Бесселя с интегральным условием первого рода* // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. В. 1. С. 5–12.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЯТОГО ПОРЯДКА

В.В. Дайняк, А.К. Андросов

В данной работе изучается задача типа Дирихле на плоскости для уравнений определенного вида пятого порядка с постоянными коэффициентами. Эти неклассические линейные дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x = (x_0, x_1)$ запишем в виде

$$\mathfrak{L}u = \Big(\frac{\partial^3}{\partial x_0^3} + a_1\frac{\partial^3}{\partial x_0 \partial x_1^2} + b_1\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big) + A(x_0,x_1)u = f(x_0,x_1), \tag{1}$$

где $A(x_0,x_1)u = q_0(x_0,x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_0} + q_1(x_0,x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda(x_0,x_1)u$. Здесь a_1, b_1 – постоянные, коэффициенты полинома $A(x_0,x_1)$ и их производные $\frac{\partial q_i}{\partial x_0}$ $(i = 1,2)$ измеримы и ограничены. При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$,