

с постоянной, не зависящей от h .

Континуальный аналог – это следующая краевая задача

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \quad (3)$$

$$\int_0^{+\infty} u(x_1, x_2) dx_1 = f(x_2), \quad \int_0^{+\infty} u(x_1, x_2) dx_2 = g(x_1), \quad \int_K u(x) dx = 0, \quad (4)$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha$$

и допускающим волновую факторизацию относительно K с индексом α таким, что $\alpha - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$. Специальный подбор дискретных функций f_d , g_d и элементов периодической волновой факторизации приводит к следующему результату.

Теорема 2. Пусть $f, g \in S(\mathbb{R})$, $\alpha > 1$. Тогда справедлива следующая оценка для решений u и u_d континуальной задачи (3), (4) и ее дискретного аналога (1), (2)

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq C(f, g)h^\beta,$$

где постоянная $C(f, g)$ зависит от функций f и g , величина $\beta > 0$ может быть произвольной.

Общие вопросы о разрешимости уравнения (1) были рассмотрены в [1,2], оценки погрешности дискретных решений некоторых других дискретных краевых задач – в [3,4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Литература

1. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space* // Math. Model. Anal. 2018. V. 23. № 3. P. 492–506.
2. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *On some discrete potential like operators* // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 195–212.
3. Васильев В. Б., Тарасова О. А. *О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах* // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 174. С. 12–19.
4. Tarasova O. A., Vasilyev V. B. *To the theory of discrete boundary value problems*. 4Open, 2019.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Васильев, В.Б. Васильев, Н.В. Эберлейн

В пространстве Соболева–Слободецкого H^s рассматривается следующая задача: найти функцию

$$U(x) = \begin{cases} u_+(x), & x \in C_+^a, \\ u_-(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a} \end{cases}$$

такую, что $u_+ \in H^s(C_+^a)$, $u_- \in H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{cases} (Au_+)(x) = 0, & x \in C_+^a, \\ (Au_-)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \end{cases} \quad (1)$$

где $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, a > 0\}$, $\Gamma = \partial C_+^a$, A – эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$,

$$c_1 \leq |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \leq c_2.$$

К уравнениям (1) мы добавляем следующие граничные условия:

$$\theta \cdot u_+|_{\partial C_+^a} + \omega \cdot u_-|_{\partial C_+^a} = \mu, \quad \eta \cdot \left(\frac{\partial u_+}{\partial n} \right)_{|\partial C_+^a} + \gamma \cdot \left(\frac{\partial u_-}{\partial n} \right)_{|\partial C_+^a} = \nu, \quad (2)$$

где $\theta, \omega, \eta, \gamma$ – комплексные числа, принимающие различные значения на сторонах угла ∂C_+^a ; $\mu \in H^{s-1/2}(\Gamma)$, $\nu \in H^{s-3/2}(\Gamma)$ – заданные на Γ функции.

Подобная задача рассматривалась в [1] при дополнительных предположениях относительно символа $A(\xi)$ и была сведена к некоторой системе одномерных интегральных уравнений, которую мы обозначим (X) . Предполагалось, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию (см. также [2,3,4], где рассматривались другие краевые задачи) относительно конуса C_+^a

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с индексом α таким, что $\alpha - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$.

Ниже мы приведем описание терминов, использованных в постановке задачи.

Пространство Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^2)$ – это гильбертово пространство с нормой

$$\|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi \right)^{1/2},$$

где $\tilde{f}$ обозначает преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Если $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, то $H^s(D)$ – это подпространство $H^s(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций с носителями в $\overline{D}$.

Пусть $A(\xi)$ – измеримая функция, определенная на $\mathbb{R}^2$. *Псевдодифференциальным оператором A в области D с символом $A(\xi)$* называется следующий оператор

$$(Au)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix \cdot \xi} A(\xi) \tilde{u}(\xi) d\xi, \quad x \in D.$$

С помощью элементов волновой факторизации $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ строятся функции $b_j(t_{3-j})$, $B_j(t_{3-j})$, $j = 1, 2$. Использование преобразования Меллина позволяет получить следующую редукцию.

Теорема 1. Пусть $\alpha = \alpha/2$ и сомножители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ однородны степени $\alpha/2$ и дифференцируемы вне начала координат,

$$b_j(t_{3-j}) \neq 0, \quad B_j(t_{3-j}) \neq 0, \quad j = 1, 2, \quad \forall t_1, t_2 \neq 0.$$

Тогда система линейных интегральных уравнений (X) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений (3) относительно неизвестных функций

$$\hat{C}_k(\lambda), \hat{D}_k(\lambda), \hat{R}_k(\lambda), \hat{Q}_k(\lambda), \quad k = 1, 2.$$

Все коэффициенты системы (3) и правые части также вычисляются по элементам $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ и заданным граничным условиям. Если матрицу системы обозначить $\mathcal{A}(\lambda)$, то получается следующий критерий разрешимости задачи линейного сопряжения (1), (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \hat{k}_{11}(\lambda) \hat{C}_1(\lambda) + \theta_1 \hat{k}_{21}(\lambda) \hat{C}_2(\lambda) + \theta_1 l_{11} \hat{D}_1(\lambda) + \\ + \omega_1 \hat{m}_{11}(\lambda) \hat{R}_1(\lambda) + \omega_1 \hat{m}_{21}(\lambda) \hat{R}_2(\lambda) + \omega_1 \hat{Q}_1(\lambda) = \hat{\mu}_{11}(\lambda), \\ \theta_1 \hat{k}_{12}(\lambda) \hat{C}_1(\lambda) + \theta_1 \hat{k}_{22}(\lambda) \hat{C}_2(\lambda) + \theta_1 l_{12} \hat{D}_2(\lambda) + \\ + \omega_1 \hat{m}_{12}(\lambda) \hat{R}_1(\lambda) + \omega_1 \hat{m}_{22}(\lambda) \hat{R}_2(\lambda) + \omega_1 \hat{Q}_2(\lambda) = \hat{\mu}_{12}(\lambda), \\ \theta_2 l_{21} \hat{C}_1(\lambda) + \theta_2 \hat{n}_{11}(\lambda) \hat{D}_1(\lambda) + \theta_2 \hat{n}_{21}(\lambda) \hat{D}_2(\lambda) + \\ + \omega_2 \hat{R}_1(\lambda) + \omega_2 \hat{p}_{11}(\lambda) \hat{Q}_1(\lambda) + \omega_2 \hat{p}_{21}(\lambda) \hat{Q}_2(\lambda) = \hat{\mu}_{21}(\lambda), \\ \theta_2 l_{22} \hat{C}_2(\lambda) + \theta_2 \hat{n}_{12}(\lambda) \hat{D}_1(\lambda) + \theta_2 \hat{n}_{22}(\lambda) \hat{D}_2(\lambda) + \\ + \omega_2 \hat{R}_2(\lambda) + \omega_2 \hat{p}_{12}(\lambda) \hat{Q}_1(\lambda) + \omega_2 \hat{p}_{22}(\lambda) \hat{Q}_2(\lambda) = \hat{\mu}_{22}(\lambda), \\ \eta_1 \hat{K}_{11}(\lambda) \hat{C}_1(\lambda) + \eta_1 \hat{K}_{21}(\lambda) \hat{C}_2(\lambda) + \eta_1 L_{11} \hat{D}_1(\lambda) + \\ + \gamma_1 \hat{M}_{11}(\lambda) \hat{R}_1(\lambda) + \gamma_1 \hat{M}_{21}(\lambda) \hat{R}_2(\lambda) + \gamma_1 \hat{Q}_1(\lambda) = \hat{\nu}_{11}(\lambda), \\ \eta_1 \hat{K}_{12}(\lambda) \hat{C}_1(\lambda) + \eta_1 \hat{K}_{22}(\lambda) \hat{C}_2(\lambda) + \eta_1 L_{12} \hat{D}_2(\lambda) + \\ + \gamma_1 \hat{M}_{12}(\lambda) \hat{R}_1(\lambda) + \gamma_1 \hat{M}_{22}(\lambda) \hat{R}_2(\lambda) + \gamma_1 \hat{Q}_2(\lambda) = \hat{\nu}_{12}(\lambda), \\ \eta_2 L_{21} \hat{C}_1(\lambda) + \eta_2 \hat{N}_{11}(\lambda) \hat{D}_1(\lambda) + \eta_2 \hat{N}_{21}(\lambda) \hat{D}_2(\lambda) + \\ + \gamma_2 \hat{R}_1(\lambda) + \gamma_2 \hat{P}_{11}(\lambda) \hat{Q}_1(\lambda) + \gamma_2 \hat{P}_{21}(\lambda) \hat{Q}_2(\lambda) = \hat{\nu}_{21}(\lambda), \\ \eta_2 L_{22} \hat{C}_2(\lambda) + \eta_2 \hat{N}_{12}(\lambda) \hat{D}_1(\lambda) + \eta_2 \hat{N}_{22}(\lambda) \hat{D}_2(\lambda) + \\ + \gamma_2 \hat{R}_2(\lambda) + \gamma_2 \hat{P}_{12}(\lambda) \hat{Q}_1(\lambda) + \gamma_2 \hat{P}_{22}(\lambda) \hat{Q}_2(\lambda) = \hat{\nu}_{22}(\lambda). \end{array} \right. \quad (3)$$

Теорема 2. В предположениях теоремы 1 условие

$$\inf |\det \mathcal{A}(\lambda)| > 0, \quad \Re \lambda = 1/2$$

является необходимым и достаточным для существования единственного решения задачи (1), (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Литература

1. Vasilyev V. B. *On some transmission problems in a plane corner* // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. V. 63. P. 291–301.
2. Vasilyev V. B. *Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems* // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 18. P. 9252–9263.
3. Васильев В. Б. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в многомерном конусе* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1356–1365.
4. Vasilyev V. B. *On certain 3D limit boundary value problem* // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 5. P. 913–921.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ АНТИПЕРСИСТЕНТНЫМИ ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

М. М. Васьковский

Предположим, что на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ -алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ задано $\mathcal{F}_t$ -согласованное дробное броуновское движение X_t с показателем Херста $H \in (0, 1/2)$. Согласно [1] определим геометрическую грубую траекторию $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$, $\mathbf{X}_{s,t}^i = \frac{(X_t - X_s)^i}{i!}$, $s, t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $i = 1, \dots, n$, $n = [1/H]$.