Все коэффициенты системы (3) и правые части также вычисляются по элементам $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ и заданным граничным условиям. Если матрицу системы обозначить $\mathcal{A}(\lambda)$, то получается следующий критерий разрешимости задачи линейного сопряжения (1), (2).

$$\begin{cases} \theta_1\hat{k}_{11}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\theta_1\hat{k}_{21}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\theta_1 l_{11}\hat{D}_1(\lambda)+ \\ +\omega_1\hat{m}_{11}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\omega_1\hat{m}_{21}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\omega_1\hat{Q}_1(\lambda)=\hat{\mu}_{11}(\lambda), \\ \theta_1\hat{k}_{12}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\theta_1\hat{k}_{22}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\theta_1 l_{12}\hat{D}_2(\lambda)+ \\ +\omega_1\hat{m}_{12}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\omega_1\hat{m}_{22}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\omega_1\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{12}(\lambda), \\ \theta_2 l_{21}\hat{C}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{11}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{21}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+ \\ +\omega_2\hat{R}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{11}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{21}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{21}(\lambda), \\ \theta_2 l_{22}\hat{C}_2(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{12}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{22}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+ \\ +\omega_2\hat{R}_2(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{12}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{22}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{22}(\lambda), \\ \eta_1\hat{K}_{11}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\eta_1\hat{K}_{21}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\eta_1 L_{11}\hat{D}_1(\lambda)+ \\ +\gamma_1\hat{M}_{11}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_1\hat{M}_{21}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_1\hat{Q}_1(\lambda)=\hat{\nu}_{11}(\lambda), \\ \eta_1\hat{K}_{12}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\eta_1\hat{K}_{22}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\eta_1 L_{12}\hat{D}_2(\lambda)+ \\ +\gamma_1\hat{M}_{12}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_1\hat{M}_{22}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_1\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{12}(\lambda), \\ \eta_2 L_{21}\hat{C}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{11}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{21}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+ \\ +\gamma_2\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{11}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{21}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{21}(\lambda), \\ \eta_2 L_{22}\hat{C}_2(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{12}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{22}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+ \\ +\gamma_2\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{12}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{22}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{22}(\lambda). \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 условие*

$$\inf|\det\mathcal{A}(\lambda)|>0, \quad \Re\lambda=1/2$$

является необходимым и достаточным для существования единственного решения задачи (1), (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Литература

1. Vasilyev V. B. *On some transmission problems in a plane corner* // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. V. 63. P. 291–301.

2. Vasilyev V. B. *Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems* // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 18. P. 9252–9263.

3. Васильев В. Б. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в многомерном конусе* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1356–1365.

4. Vasilyev V. B. *On certain 3D limit boundary value problem* // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 5. P. 913–921.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ АНТИПЕРСИСТЕНТНЫМИ ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

М.М. Васьковский

Предположим, что на полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задано $\mathcal{F}_t$-согласованное дробное броуновское движение X_t с показателем Херста $H\in(0,1/2)$. Согласно [1] определим геометрическую грубую траекторию $\mathbf{X}=(1,\mathbf{X}^1,\ldots,\mathbf{X}^n)$, $\mathbf{X}^i_{s,t}=\frac{(X_t-X_s)^i}{i!}$, $s,t\in\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $i=1,\ldots,n$, $n=[1/H]$.

Далее $\mathbf{X}_{0,t}$ будем обозначать через $\mathbf{X}_t$. Выберем и зафиксируем произвольное число $\alpha \in (0, H)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\, d\mathbf{X}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – функция, имеющая непрерывные и ограниченные производные любого порядка $k \in \{0, \dots, n+1\}$, $f(0) = 0$.

Определение 1. Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. *Решением уравнения (1) с начальным условием* $Y_0 = \xi$ будем называть $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс, почти все траектории которого принадлежат $C^\alpha(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, и такой, что п.н. для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$Y_t = \xi + \int\limits_0^t f(Y_s)\, d\mathbf{X}_s, \tag{2}$$

где интеграл в правой части соотношения (2) понимается как грубый потраекторный интеграл [1, 2].

Определение 2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (1) *устойчиво по вероятности*, если для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ такое, что для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \delta$ п.н., выполняется неравенство

$$P\Big(\sup_{t \geqslant 0} |Y_t| \geqslant \varepsilon_1\Big) \leqslant \varepsilon_2,$$

где Y – решение уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = \xi$. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (1) *асимптотически устойчиво по вероятности*, если оно устойчиво по вероятности, и существует $\Delta > 0$ такое, что для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \Delta$ п.н., имеет место сходимость по вероятности

$$Y_t \xrightarrow[t \to +\infty]{P} 0.$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$. *Если нулевое решение уравнения* $dZ_t = f(Z_t)\, dt$ *устойчиво по Ляпунову (соответственно асимптотически устойчиво) при* $t \geqslant 0$, *то нулевое решение уравнения (1) устойчиво по вероятности (соответственно асимптотически устойчиво по вероятности).*

Литература

1. Васьковский М.М. *Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1305–1317.

2. Васьковский М.М. *Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1443–1449.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА С ОПЕРАТОРОМ СВЕРТКИ

Ю.П. Вирченко, А.С. Мазманишвили

В сообщении предлагается решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода на отрезке $[0, t]$ в пространстве $\mathbb{L}_2[0, T]$, интегральное ядро которого представляет преобразование свертки

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda \int\limits_0^t K(t - x, y) f(y)\, dt\,. \tag{1}$$