Далее $\mathbf{X}_{0,t}$ будем обозначать через $\mathbf{X}_t$. Выберем и зафиксируем произвольное число $\alpha \in (0, H)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t)\, d\mathbf{X}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – функция, имеющая непрерывные и ограниченные производные любого порядка $k \in \{0, \ldots, n+1\}$, $f(0) = 0$.

Определение 1. Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. *Решением уравнения (1) с начальным условием* $Y_0 = \xi$ будем называть $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс, почти все траектории которого принадлежат $C^\alpha(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, и такой, что п.н. для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$Y_t = \xi + \int\limits_0^t f(Y_s)\, d\mathbf{X}_s, \tag{2}$$

где интеграл в правой части соотношения (2) понимается как грубый потраекторный интеграл [1, 2].

Определение 2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (1) *устойчиво по вероятности*, если для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ такое, что для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \delta$ п.н., выполняется неравенство

$$P\Big(\sup_{t \geqslant 0} |Y_t| \geqslant \varepsilon_1\Big) \leqslant \varepsilon_2,$$

где Y – решение уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = \xi$. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (1) *асимптотически устойчиво по вероятности*, если оно устойчиво по вероятности, и существует $\Delta > 0$ такое, что для любой $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\xi| \leqslant \Delta$ п.н., имеет место сходимость по вероятности

$$Y_t \xrightarrow[t \to +\infty]{P} 0.$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$. *Если нулевое решение уравнения* $dZ_t = f(Z_t)\, dt$ *устойчиво по Ляпунову (соответственно асимптотически устойчиво) при* $t \geqslant 0$, *то нулевое решение уравнения (1) устойчиво по вероятности (соответственно асимптотически устойчиво по вероятности).*

Литература

1. Васьковский М.М. *Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1305–1317.

2. Васьковский М.М. *Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1443–1449.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА С ОПЕРАТОРОМ СВЕРТКИ

Ю.П. Вирченко, А.С. Мазманишвили

В сообщении предлагается решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода на отрезке $[0, t]$ в пространстве $\mathbb{L}_2[0, T]$, интегральное ядро которого представляет преобразование свертки

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda \int\limits_0^t K(t - x, y) f(y)\, dt\,. \tag{1}$$

В частном случае, когда ядро $K(x,y)$ имеет вид

$$K(x,y) = K\exp\big(-\nu|x-y|\big)$$

с произвольными постоянными $\nu > 0$, $K > 0$ вычислен детерминант и резольвента Фредгольма. Это вычисление основано на расщеплении пространства $\mathbb{L}_2[0,T]$ в прямую сумму двух пространств $\mathbb{L}_2^{(+)}[0,T] \oplus \mathbb{L}_2^{(-)}[0,T]$, которые состоят, соответственно, из четных и нечетных функций относительно операции преобразования аргумента $x \Rightarrow t - x$. В соответствии с этим, вводится четырехкомпонентный вектор

$$\big\langle -f(t-x), f(t-x), -f(x), f(x)\big\rangle$$

и, в результате, вычисление детерминанта Фредгольма $Q(\lambda)$, который представляется в виде $Q(\lambda) = Q_+(\lambda)Q_-(\lambda)$, сводится к нахождению фундаментального решения $U(t)$ динамической системы с постоянными коэффициентами четвертого порядка и на его основе построению решения краевой задачи для этой системы, удовлетворяющего конкретным граничным условиям в точках $x = 0$, $x = T$ и $x = T/2$. Фундаментальное решение $U(t)$ задается следующими формулами

$$U(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} C_+ + \nu S_+ - \lambda K S_- & -\lambda K S_- & -\lambda S_+ & C_- - \lambda K S_+ + \nu S_- \\ \lambda K S_- & C_+ - \nu S_+ + \lambda K S_- & C_- + \lambda K S_+ - \nu S_- & \lambda k S_+ \\ \lambda K S_+ & C_- + \lambda K S_+ - \nu S_- & C_+ - \nu S_+ + \lambda K S_- & \lambda k S_- \\ C_- - \lambda K S_+ + \nu S_- & -\lambda K S_- & -\lambda S_- & C_+ + \nu S_+ - \lambda K S_- \end{pmatrix},$$

$$C_\pm(t) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{ch}(a_+(\lambda)t) \pm \mathrm{ch}(a_-(\lambda)t)\Big], \quad S_\pm(t) = \frac{1}{2}\Big[\frac{\mathrm{sh}(a_+(\lambda)t)}{a_+(\lambda)} \pm \frac{\mathrm{sh}(a_-(\lambda)t)}{a_-(\lambda)}\Big].$$

Представим формулы, полученные в результате вычислений, согласно описанному методу

$$Q_\pm(\lambda) = e^{\nu t/4}\Big[\mathrm{ch}(a_\pm(\lambda)t/2) + \frac{\nu}{a_\pm(\lambda)}\mathrm{sh}(a_\pm(\lambda)t/2)\Big]^{-1/2}, \quad a_\mp(\lambda) = \sqrt{\nu^2 \pm 2\nu\Lambda}. \qquad (2)$$

Литература

1. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. *Распределение вероятностей случайного функционала свёртки от нормального марковского процесса* // Проблемы передачи информации. 1990. № 26; 3. С. 96–101.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ГИБРИДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Д.А. Долженкова, А.А. Леваков

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, независимые $(\mathcal{F}_t)$-броуновские движения $W(t)$, $W_1(t)$, функции

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d, \quad g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d,$$
$$h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r, \quad q : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r,$$