В частном случае, когда ядро $K(x,y)$ имеет вид

$$K(x,y) = K \exp\big(-\nu|x-y|\big)$$

с произвольными постоянными $\nu > 0$, $K > 0$ вычислен детерминант и резольвента Фредгольма. Это вычисление основано на расщеплении пространства $\mathbb{L}_2[0,T]$ в прямую сумму двух пространств $\mathbb{L}_2^{(+)}[0,T] \oplus \mathbb{L}_2^{(-)}[0,T]$, которые состоят, соответственно, из четных и нечетных функций относительно операции преобразования аргумента $x \Rightarrow t-x$. В соответствии с этим, вводится четырехкомпонентный вектор

$$\big\langle -f(t-x), f(t-x), -f(x), f(x) \big\rangle$$

и, в результате, вычисление детерминанта Фредгольма $Q(\lambda)$, который представляется в виде $Q(\lambda) = Q_+(\lambda)Q_-(\lambda)$, сводится к нахождению фундаментального решения $U(t)$ динамической системы с постоянными коэффициентами четвертого порядка и на его основе построению решения краевой задачи для этой системы, удовлетворяющего конкретным граничным условиям в точках $x=0$, $x=T$ и $x=T/2$. Фундаментальное решение $U(t)$ задается следующими формулами

$$U(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} C_+ + \nu S_+ - \lambda K S_- & -\lambda K S_- & -\lambda S_+ & C_- - \lambda K S_+ + \nu S_- \\ \lambda K S_- & C_+ - \nu S_+ + \lambda K S_- & C_- + \lambda K S_+ - \nu S_- & \lambda k S_+ \\ \lambda K S_+ & C_- + \lambda K S_+ - \nu S_- & C_+ - \nu S_+ + \lambda K S_- & \lambda k S_- \\ C_- - \lambda K S_+ + \nu S_- & -\lambda K S_- & -\lambda S_- & C_+ + \nu S_+ - \lambda K S_- \end{pmatrix},$$

$$C_\pm(t) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{ch}(a_+(\lambda)t) \pm \mathrm{ch}(a_-(\lambda)t)\Big], \quad S_\pm(t) = \frac{1}{2}\Big[\frac{\mathrm{sh}(a_+(\lambda)t)}{a_+(\lambda)} \pm \frac{\mathrm{sh}(a_-(\lambda)t)}{a_-(\lambda)}\Big].$$

Представим формулы, полученные в результате вычислений, согласно описанному методу

$$Q_\pm(\lambda) = e^{\nu t/4}\Big[\mathrm{ch}(a_\pm(\lambda)t/2) + \frac{\nu}{a_\pm(\lambda)}\mathrm{sh}(a_\pm(\lambda)t/2)\Big]^{-1/2}, \quad a_\mp(\lambda) = \sqrt{\nu^2 \pm 2\nu\Lambda}. \qquad (2)$$

Литература

1. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. *Распределение вероятностей случайного функционала свёртки от нормального марковского процесса* // Проблемы передачи информации. 1990. № 26; 3. С. 96–101.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ГИБРИДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Д.А. Долженкова, А.А. Леваков

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, независимые $(\mathcal{F}_t)$-броуновские движения $W(t)$, $W_1(t)$, функции

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d, \quad g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d,$$
$$h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r, \quad q : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r,$$

которые при каждых фиксированных (x, y) измеримы по Борелю и при каждом фиксированном t непрерывны по (x, y).

Рассмотрим стохастическую гибридную дифференциально-разностную систему

$$dx(t,\omega) = f\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big)dt + g\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big)dW(t,\omega), \tag{1}$$

$$y(t+1,\omega) = h\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big) + q\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big)\big(W_1(t+1,\omega) - W_1(t,\omega)\big) \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x(0,\omega) = \eta(\omega), \quad y(t,\omega) = z(t,\omega), \quad t \in [0,1), \tag{3}$$

где η – d-мерный $(\mathcal{F}_0)$-измеримый случайный вектор, z – r-мерный непрерывный $(\mathcal{F}_0)$-согласованный процесс.

Определение 1. Пару процессов $(x(t,\omega), y(t,\omega))$, определенных на вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{F}, P\big)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, будем называть *решением системы (1)–(2) с заданными начальными условиями (3)*, если:

1) $x(t,\omega)$ – d-мерный непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный случайный процесс;

2) $y(t,\omega)$ – r-мерный кусочно-непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный случайный процесс, который непрерывен на промежутках $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N} \cup 0$;

3) для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ п.н.

$$\int\limits_0^t \Big\|f\big(s, x(s,\omega), y(s,\omega)\big)\Big\|\, ds < \infty, \quad \int\limits_0^t \Big\|g\big(s, x(s,\omega), y(s,\omega)\big)\Big\|^2 ds < \infty;$$

4) с вероятностью 1 для каждого $t \in \mathbb{R}_+$

$$x(t,\omega) = \eta(\omega) + \int\limits_0^t f\big(s, x(s,\omega), y(t,\omega)\big)ds + \int\limits_0^t g\big(s, x(s,\omega), y(t,\omega)\big)dW(s,\omega), \tag{4}$$

где первый интеграл является интегралом Лебега, а второй – интегралом Ито, и

$$y(t+1,\omega) = h\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big) + q\big(t, x(t,\omega), y(t,\omega)\big)\big(W_1(t+1) - W_1(t)\big). \tag{5}$$

Определение 2. Будем говорить, что стохастическая гибридная система (1)–(2) с заданными начальными условиями (3) *имеет единственное решение*, если для любых двух решений $\big(x_1(t,\omega), y_1(t,\omega)\big)$ и $\big(x_2(t,\omega), y_2(t,\omega)\big)$ с вероятностью 1 для любого $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место равенство

$$x_1(t,\omega) = x_2(t,\omega), \quad y_1(t,\omega) = y_2(t,\omega). \tag{6}$$

Будем говорить, что функции f и g удовлетворяют условию $A)$, если

$A_1)$ для любых $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^a \left(\sup_{\|x\| \leqslant b} \big(\|f(t, x(t), y(t))\|\big) + \sup_{\|x\| \leqslant b} \big(\|g(t, x(t), y(t))\|^2\big) \right) dt < \infty;$$

$A_2)$ существует вещественное отображение $k_0(t)$, удовлетворяющее при каждом $a \in \mathbb{R}_+$ условию $\int_0^a k_0(t)dt < \infty$, такое, что при любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$ выполняется неравенство

$$\|f(t,x_1,y) - f(t,x_2,y)\|^2 + \|g(t,x_1,y) - g(t,x_2,y)\|^2 \le k_0(t)\|x_1 - x_2\|^2\|y\|^2;$$

$A_3)$ существует вещественное отображение $k_1(t)$, удовлетворяющее при каждом $a \in \mathbb{R}_+$ условию $\int_0^a k_1^2(t)\,dt < \infty$ такое, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и любых $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$ выполняется неравенство

$$\|f(t,x,y)\| + \|g(t,x,y)\| \leqslant k_1(t)(1 + \|x\| + \|y\|).$$

Условие $A_3)$ означает, что функции f и g имеют линейный порядок роста по x и по y.

Теорема. *Если отображения f и g удовлетворяют условию $A)$, то для любого $(\mathcal{F}_0)$-измеримого случайного вектора $\eta(\omega)$ и любого непрерывного $(\mathcal{F}_0)$-согласованного случайного процесса $z(t,\omega)$, $t \in [0,1)$, удовлетворяющих условиям*

$$E\big(\|\eta(\omega)\|^2\big) < \infty, \quad E\Big(\int_0^1 \|z(t,\omega)\|^2\,dt\Big) < \infty,$$

система (1)-(2) имеет единственное решение с начальными условиями (3).

Литература

1. Леваков А. А., Васьковский М. М. *Стохастические дифференциальные уравнения и включения.* Минск: БГУ, 2019.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

А.И. Жук, Е.Н. Защук

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0,a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1,p}, \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, – некоторые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), ..., x^p(t)]$, а $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$, – функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$, непрерывны справа, $L^i(0) = L^i(0^-) = 0$ и $L^i(a^-) = L^i(a)$, $i = \overline{1,q}$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1,p}, \tag{2}$$