О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ МАТРИЧНОГО ТИПА С ВАРИАЦИОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М.В. Игнатенко, Л.А. Янович

Теория вариационных производных, их свойств, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с вариационными производными достаточно полно изложена, например, в монографиях [1–3], и имеет многочисленные приложения в статистической физике, квантовой теории поля, гидромеханике и других областях.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение с вариационными производными первого и второго порядков

$$\frac{\delta^2 I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)\delta x\left(t\right)}-A\frac{\delta I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)}+\frac{1}{4}A^2 I\left(x\right)=0, \tag{1}$$

где $I\left(x\right)$ – искомый матричнозначный оператор, определенный на функциональном пространстве X, например, $C\left(T\right)$ или $L_2\left(T\right)$ $\left(T\in\mathbb{R}\right)$; A – постоянная квадратная матрица.

Теорема. *Интегральный оператор*

$$I\left(x\right)=\exp\int\limits_T\frac{1}{2}Ax\left(t\right)dt\left[C_1+C_2\int\limits_T x\left(t\right)dt\right], \tag{2}$$

где C_1 и C_2 – произвольные матрицы того же размера, что и A, при условии существования обратной матрицы A^{-1} является решением уравнения (1).

Для доказательства теоремы предварительно вычислим дифференциалы Гато первого порядка $\delta I\left[x;h\right]$ по направлению $h=h\left(t\right)$ и второго порядка $\delta^2 I\left[x;h_1,h_2\right]$ по направлениям $h_1=h_1\left(t\right)$ и $h_2=h_2\left(t\right)$ в точке $x=x\left(t\right)$ для оператора $I\left(x\right)$ вида (2). Имеем

$$\delta I\left[x;h\right]=\lim_{\lambda\to 0}\frac{I\left(x+\lambda h\right)-I\left(x\right)}{\lambda}=\left.\frac{dI\left(x+\lambda h\right)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=$$

$$=\left.\left(\exp\int\limits_T\frac{1}{2}A(x(t)+\lambda h(t))dt\left[C_1+C_2\int\limits_T(x(t)+\lambda h(t))dt\right]\right)'_\lambda\right|_{\lambda=0}=$$

$$=\frac{1}{2}A\exp\int\limits_T\frac{1}{2}Ax(t)dt\left[C_1+C_2\int\limits_T x(t)dt\right]\int\limits_T h(s)ds+C_2\exp\int\limits_T\frac{1}{2}Ax(t)dt\int\limits_T h(s)ds;$$

$$\delta^2 I\left[x;h_1,h_2\right]=\left.\frac{\partial^2 I\left(x+\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2\right)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right|_{\lambda_1=\lambda_2=0}=$$

$$=\left.\frac{\partial^2\left(\exp\int_T\frac{1}{2}A(x(t)+\lambda_1 h_1(t)+\lambda_2 h_2(t))dt\left[C_1+C_2\int_T(x(t)+\lambda_1 h_1(t)+\lambda_2 h_2(t))dt\right]\right)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right|_{\lambda_1=\lambda_2=0}=$$

$$=\frac{1}{4}A^2\exp\int\limits_T\frac{1}{2}Ax(t)dt\left[C_1+C_2\int\limits_T x(t)dt\right]\int\limits_T\int\limits_T h_1(s_1)h_2(s_2)ds_1 ds_2+$$

$$+AC_2 \exp \int\limits_T \frac{1}{2} Ax(t)dt \int\limits_T \int\limits_T h_1(s_1)h_2(s_2)ds_1 ds_2.$$

Далее, с учетом определений

$$\delta I\left[x;h\right] = \int\limits_T \frac{\delta I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)} h(s)ds, \quad \delta^2 I\left[x;h_1,h_2\right] = \int\limits_T \int\limits_T \frac{\delta^2 I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)\delta x\left(t\right)} h_1(s_1)h_2(s_2)ds_1 ds_2,$$

получим следующие правила для вычисления вариационных производных $\dfrac{\delta I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)}$, $\dfrac{\delta^2 I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)\delta x\left(t\right)}$ первого и второго порядков соответственно:

$$\frac{\delta I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)} = \frac{1}{2} A \exp \int\limits_T \frac{1}{2} Ax\left(t\right)dt \left(C_1 + C_2 \int\limits_T x\left(t\right)dt \right) + C_2 \exp \int\limits_T \frac{1}{2} Ax\left(t\right)dt, \qquad (3)$$

$$\frac{\delta^2 I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)\delta x\left(t\right)} = \frac{1}{4} A^2 \exp \int\limits_T \frac{1}{2} Ax\left(t\right)dt \left(C_1 + C_2 \int\limits_T x\left(t\right)dt \right) + AC_2 \exp \int\limits_T \frac{1}{2} Ax\left(t\right)dt. \qquad (4)$$

Так как левая часть $\dfrac{\delta^2 I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)\delta x\left(t\right)}$ равенства (4) совпадает с разностью

$$\frac{A\delta I\left(x\right)}{\delta x\left(t\right)} - \frac{1}{4} A^2 I\left(x\right),$$

то из системы уравнений (3), (4) при условии существования матрицы A^{-1} имеем

$$I\left(x\right) = \exp \int\limits_T \frac{1}{2} Ax\left(t\right)dt \quad \left[C_1 + C_2 \int\limits_T x\left(t\right)dt \right],$$

т.е. интегральный оператор (2) действительно является решением уравнения (1).

Отметим, что точное и приближенное решение отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков, встречающихся в различных прикладных областях и математической физике, предложено в работе [4]. Решение некоторых дифференциальных уравнений с интегральными операторами специального вида и первыми вариационными производными, полученное интерполяционными методами, рассмотрено в статье [5]. Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографиях [6–9].

Литература

1. Смирнов В. И., Крылов В. И., Канторович Л. В. *Вариационное исчисление.* Л.: Кубуч, 1933.

2. Леви П. *Конкретные проблемы функционального анализа.* М.: Наука, 1967.

3. Вайнберг М. М. *Вариационные методы исследования нелинейных операторов.* М.: Гостехиздат, 1956.

4. Игнатенко М. В., Янович Л. А. *О точном и приближенном решении отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 1. С. 51–71.

5. Игнатенко М. В., Янович Л. А. *Функциональное дифференцирование интегральных операторов специального вида и некоторые вопросы обратного интерполирования* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 2021. Т. 57. № 4. С. 401–416.

6. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А. *Интерполирование операторов.* Киев: Наук. думка, 2000.

7. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. *Methods of Operator Interpolation.* Праці Ін-ту математики НАН України. 2010. V. 83: Математика та ii застосування. P. 1–517.

8. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Основы теории интерполирования функций матричных переменных.* Минск: Беларус. навука, 2016.

9. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц.* Минск: Беларус. навука, 2020.

ПРИМЕНЕНИЕ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ДРОБНО-ИНТЕГРИРОВАННОГО СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ДЛЯ АНАЛИЗА ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ДЛИННОЙ ПАМЯТЬЮ

С.В. Рогозин, Р.В. Зуёнок, М.В. Дубатовская

В докладе обсуждается применение модели ARFIMA для исследования финансовых временных рядов с длинной памятью. Временные ряды с длинной памятью возникают при анализе валютных рынков, макроэкономических показателей, доходности финансовых активов и изучении других экономических объектов и процессов (см, например, [1-3]). Ряды с длинной памятью характеризуются функцией автокорреляции, которая медленно убывает по мере увеличения временного лага. Для таких рядов существует зависимость между далеко отстоящими друг от друга наблюдениями. Естественно предполагать, что длинная память может быть обнаружена лишь в наблюдениях, относящихся к значительному временному промежутку. С другой стороны моделирование таких временных рядов позволяет строить долгосрочные прогнозы, отличные от прогнозов, полученных на основе ранее существовавших моделей и в большей степени соответствующие исследуемым данным. Понятие длинной памяти занимает промежуточное место между понятиями короткой и бесконечной памяти [1].

Говорят, что стохастический процесс является *процессом с длинной памятью*, если его спектральная плотность удовлетворяет условию

$$f(\lambda) \sim c|\lambda|^{-2d}, \quad \lambda \to 0. \tag{1}$$

Для характеристики процесса X_t с длинной памятью используется следующий показатель

$$d = H - \frac{1}{2}, \tag{2}$$

где H – показатель Херста (см. [1]).

Для рядов с короткой памятью эффект шока не оказывает влияния на их поведение в долгосрочном периоде. Для ряда с бесконечной памятью эффект шока сказывается на всех будущих значениях данного ряда. В промежуточном случае эффект крайне длительный, но не перманентный.

Линейная авторегрессионная дробно-интегрированная модель скользящего среднего $ARFIMA(p, d, q)$ предложена в [2] в качестве обобщения известной авторегрессионной интегрированной модели скользящего среднего $ARIMA(p, q)$ и авторегрессионной модели скользящего среднего $ARMA(p, q)$. В модели $ARIMA(p, q)$ параметр p