5. Игнатенко М. В., Янович Л. А. *Функциональное дифференцирование интегральных операторов специального вида и некоторые вопросы обратного интерполирования* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2021. Т. 57. № 4. С. 401–416.

6. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А. *Интерполирование операторов.* Киев: Наук. думка, 2000.

7. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. *Methods of Operator Interpolation.* Праці Ін-ту математики НАН України. 2010. V. 83: Математика та ii застосування. P. 1–517.

8. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Основы теории интерполирования функций матричных переменных.* Минск: Беларус. навука, 2016.

9. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц.* Минск: Беларус. навука, 2020.

ПРИМЕНЕНИЕ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ДРОБНО-ИНТЕГРИРОВАННОГО СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ДЛЯ АНАЛИЗА ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ДЛИННОЙ ПАМЯТЬЮ

С.В. Рогозин, Р.В. Зуёнок, М.В. Дубатовская

В докладе обсуждается применение модели ARFIMA для исследования финансовых временных рядов с длинной памятью. Временные ряды с длинной памятью возникают при анализе валютных рынков, макроэкономических показателей, доходности финансовых активов и изучении других экономических объектов и процессов (см, например, [1-3]). Ряды с длинной памятью характеризуются функцией автокорреляции, которая медленно убывает по мере увеличения временного лага. Для таких рядов существует зависимость между далеко отстоящими друг от друга наблюдениями. Естественно предполагать, что длинная память может быть обнаружена лишь в наблюдениях, относящихся к значительному временному промежутку. С другой стороны моделирование таких временных рядов позволяет строить долгосрочные прогнозы, отличные от прогнозов, полученных на основе ранее существовавших моделей и в большей степени соответствующие исследуемым данным. Понятие длинной памяти занимает промежуточное место между понятиями короткой и бесконечной памяти [1].

Говорят, что стохастический процесс является *процессом с длинной памятью*, если его спектральная плотность удовлетворяет условию

$$f(\lambda) \sim c|\lambda|^{-2d}, \quad \lambda \to 0. \tag{1}$$

Для характеристики процесса X_t с длинной памятью используется следующий показатель

$$d = H - \frac{1}{2}, \tag{2}$$

где H – показатель Херста (см. [1]).

Для рядов с короткой памятью эффект шока не оказывает влияния на их поведение в долгосрочном периоде. Для ряда с бесконечной памятью эффект шока сказывается на всех будущих значениях данного ряда. В промежуточном случае эффект крайне длительный, но не перманентный.

Линейная авторегрессионная дробно-интегрированная модель скользящего среднего $ARFIMA(p, d, q)$ предложена в [2] в качестве обобщения известной авторегрессионной интегрированной модели скользящего среднего $ARIMA(p, q)$ и авторегрессионной модели скользящего среднего $ARMA(p, q)$. В модели $ARIMA(p, q)$ параметр p

характеризует авторегрессионную функцию, а параметр q связан с моделью скользящего среднего. Модель авторегрессии – это расширение случайного блуждания, которое включает прошедшие события. Эта модель линейно зависит от прошедших событий и в основном представляет собой регрессионную модель, в которой предыдущие члены являются предикторами. Модель скользящего среднего аналогична модели авторегрессии, за исключением того, что она представляет собой линейную комбинацию прошлых значений белого шума. Разница между ними заключается в том, что модель $MA(1)$ будет учитывать только последнее резкое изменение данных, а не все предыдущие, которые учитываются моделью $AR(1)$. Модель $ARMA$ представляет собой комбинацию моделей AR и MA с целью улавливать как эффекты участников рынка (эффекты импульса и возврата к среднему), так и характеризовать информацию о шоке (неожиданное событие). Модели AR, MA и $ARMA$ не являются условно гетероскедастичными и не учитывают кластеризацию волатильности.

Приведем формальное определение модели $ARFIMA(p,d,q)$ следуя [4]. Говорят, что процесс X_t является *авторегрессионным порядка p проинтегрированным процессом $I(d)$ порядка d скользящего среднего порядка q*, если имеет место следующее его представление

$$\begin{gathered}(1-L)^d\, y_t = \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T,\\ \varphi(L)\,(1-L)^d\, X_t = \theta(L)\eta_t,\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\varphi(L)\varepsilon_t = \Theta(L)\eta_t, \quad \Phi(L)\varepsilon_t = \theta(L)\eta_t, \quad \eta_t \sim N(0,\sigma^2).$$

Здесь L – лаговый оператор обратного сдвига ($LX_t = X_{t-1}$), $\varphi(L), \theta(L)$ – многочлены: $\varphi(L) = 1 - \varphi_1 L - \ldots - \varphi_p L^p$, $\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q$, а процесс ε_t является процессом с короткой памятью, т.е. $I(0)$. Параметр d считается в этом случае дробным числом $d \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Оператор $(1-L)^d$ имеет следующее разложение в ряд (т.е. является обобщенной операторно-значной функцией Миттаг–Леффлера [5])

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} B^j,$$

где $\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ – гамма-функция Эйлера. Автокорреляционная функция такого ряда в случае $d \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ имеет вид

$$\rho_k = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1-d)} \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}, \quad k \to \infty.$$

Таким образом, при $d \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ процесс является стационарным. Если $d = 0$, то процесс имеет короткую память, т.е. по существу это белый шум (модель $ARMA(p,q)$). При $d \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ говорят, что процесс соответствует ряду, обладающему свойством антиперсистентности. При $d \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ процесс является нестационарным. При $d = 1$ процесс X_t – это фактически процесс единичного корня (модель $ARIMA(p,q)$).

В докладе обсуждается применение процессов с длинной памятью для анализа доходности курсов валют. В качестве примера берется исследование курса белорусского рубля относительно доллара США. Использованы ежедневные данные Национального банка Республики Беларусь за период 01.01.2016 – 01.12.2021. Прогноз строился на одной и той же выборке с использованием различных классов моделей, а именно модель “белого шума”, $ARMA(2,8)$ и итоговая модель $ARFIMA(2,0.18,8)$. Итоговая модель оказалась наиболее пригодной для прогнозирования, так как ее показатели, хоть и незначительно, но превосходят показатели прогнозной силы модели $ARMA$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ "Конвергенция-2025", НИР 1.7.01.4.

Литература

1. Перцовский О. Е. *Моделирование валютных рынков на основе процессов с длинной памятью: Препринт WP2/2004/03* // М: ГУ ВШЭ. 2004. № 03.

2. Mandelbrot B., van Ness J. W. *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications* // SIAM Review. 1968. T. 10. № 4. P. 422–437.

3. Nigmatullin R., Machado J. T. *Method of forecasting of random sequences based on the Prony decomposition analysis of finance/economic data* // Analytic Method of Analysis and Differential Equations (AMADE 2015), S. V. Rogosin, M. V. Dubatovskaya eds. Cambridge Scientific Publishers, 2016. P. 101–126.

4. Щетинин М. Ю. *О методах оценивания длинной памяти финансовых временных рядов* // Математические методы анализа в экономике. 2010. Т. 13. № 37. С. 39–45.

5. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. *Mittag-Leffler Functions: Related Topics and Applications.* 2nd edition. Berlin - New York: Springer, 2020.

О СОВРЕМЕННЫХ РАБОТАХ ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С.М. Ситник, Абдул Ахад Ариан, Ал-Кархи Хаитхам, Абдул Мохаммад Кудоси

В докладе будут изложены некоторые современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Рассматриваются определённые типы дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, основное внимание уделяется дифференциальным уравнениям с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2}{dx^2}u(x) + \frac{\nu}{x}\frac{d}{dx}u(x).$$

В докладе современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям рассматриваются на основе ряда последних публикаций по этой тематике, см. [1–7]. Среди них особо отметим опубликованный в 2020 г. в издательстве Springer в серии *Trends in Mathematics* сборник работ [5] под редакцией В.В. Кравченко и С.М. Ситника по современной теории операторов преобразования, а также организованную В.В. Кравченко в октябре 2020 г. в Кэретаро, Мексика, CINVESTAV, первую специализированную конференцию по теории операторов преобразования [7], получившую сладко звучащее по–русски название TORT (Transmutation Operators and Related Topics). В конференции приняли участие ряд известных математиков.

Таким образом, теория операторов преобразования и их многочисленных приложений является живой и активной ветвью современной математики. Операторам преобразования и их различным применениям посвящено достаточное число публикаций, в том числе издающихся монографий и сборников.

Литература

1. Катрахов В. В., Ситник С. М. *Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64. № 2. С. 211–426.