2. Шишкина Э. Л. *Общее уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и гиперболические B–потенциалы* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65. № 2. С. 157–338.

3. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя.* М.: Физматлит, 2019.

4. Shishkina E. L., Sitnik S. M. *Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. / In the Series: Mathematics in Science and Engineering.* Elsevier, Academic Press, 2020.

5. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. *Transmutation Operators and Applications. / In the Series: Trends in Mathematics.* Springer, Birkhäuser, 2020.

6. Kravchenko V. V. *Forward and Inverse Sturm–Liouville Problems: A Method of Solution.* Springer, 2020.

7. International Workshop on Transmutation Operators and Related Topics — I. Queretaro, Mexico, CINVESTAV. 2019. *https : //www.math.cinvestav.mx/IWTOR.*

НАЧАЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ СИСТЕМНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

И.В. Трифонова

К вопросу описания решения систем интегро-дифференциальных уравнений на протяжении последнего столетия обращались многие исследователи, как физики, так и математики [1-2], а разработка теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений была начата еще А.М. Ляпуновым, Э. Шмидтом, А. Хаммерштейном, Л. Лихтенштейном. Опишем возможности применения теории нелинейных эволюционных операторов второй кратности с обобщенными характеристиками [3] к приближению решения нелинейной динамической системы. Системный оператор A второй кратности определяется как:

$$A(x_1, x_2) = \sum_{n_1, n_2} S_{n_1+n_2}\big(a_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})\big), \quad (x_1, x_2) \in X^2,$$

где X – индуктивный предел семейства пространств X_a бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси, носители которых содержатся на $[a;\infty)$; a_{n_1,n_2} – обобщенная функция с носителем $[0;\infty)^n$; $S_{n_1+n_2}$ – оператор сокращения переменных n-го порядка $(n = n_1+n_2)$; $x_j^{\otimes n_1}$ – тензорная степень n_1-го порядка x_j, $j = 1, 2$; $*$ – n-мерная свертка обобщенных функций. Численное описание состояния системы строится на комплексных коэффициентах передачи в виде спектральных характеристик нелинейного оператора [4]. Тогда для системы

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t K_1(t-s)x_1(s)\,ds + x_1'(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_1^2(t) + x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t) = f_1(t), \\ \displaystyle\int_0^t K_2(t-s)x_1(s)\,ds + x_2'(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_1^2(t) + x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t) = f_2(t), \end{cases}$$

где f_1, f_2 – обобщенные функции с носителем на замкнутой положительной полуоси, начальные импульсные характеристики системного оператора представляются в следующем виде:

$$A_1(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} a^1_{1,0} = K_1 + \delta' + \delta & a^1_{0,1} = \delta \\ a^2_{1,0} = \delta & a^2_{0,1} = K_2 + \delta' + \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$A_2(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} a^1_{2,0} = K_{11} + \delta^{\otimes 2} & a^1_{1,1} = \delta^{\otimes 2} & a^1_{0,2} = \delta^{\otimes 2} \\ a^2_{2,0} = \delta^{\otimes 2} & a^2_{1,1} = \delta^{\otimes 2} & a^2_{0,2} = K_{22} + \delta^{\otimes 2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1^{\otimes 2} \\ x_1 \otimes x_2 \\ x_2^{\otimes 2} \end{pmatrix},$$

$$A_k = 0 \quad \forall k \geqslant 3,$$

где δ – дельта-функция Дирака, δ' – обобщенная производная дельта-функции.

На основании теоремы о композиции системных эволюционных операторов второй кратности, после применения обобщенного преобразования Лапласа, получим матрицы обобщенных спектральных характеристик $(\tilde{a}_{n,m})$ операторных компонент системного оператора A

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1(\lambda) + \lambda + 1 & 1 \\ 1 & \tilde{K}_2(\lambda) + \lambda + 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_k = 0 \quad \forall k \geqslant 3.$$

Найдем обратную матрицу к $\tilde{A}_1$. Строим начальные компоненты асимптотически обратного системного оператора B к оператору A, которые обозначим B_1 и B_2.

$$\Delta = (\tilde{K}_1(\lambda) + \lambda + 1)(\tilde{K}_2(\lambda) + \lambda + 1) - 1 =$$

$$= \tilde{K}_1\tilde{K}_2 + \lambda\tilde{K}_1(\lambda) + \lambda\tilde{K}_2(\lambda) + \tilde{K}_1(\lambda) + \tilde{K}_2(\lambda) + \lambda^2 + \lambda,$$

$$\tilde{B}_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \tilde{K}_2(\lambda) + \lambda + 1 & -1 \\ -1 & \tilde{K}_1(\lambda) + \lambda + 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \tilde{B}_2(\tilde{B}_1, \tilde{B}_1).$$

На основании обратного преобразования Лапласа, применяемого к построенной матрице, выполняется построение матриц импульсных характеристик начальных компонент асимптотически обратного системного оператора B. Рекурсивный алгоритм позволяет описать системный оператор B.

Литература

1. Вайнберг М. М. *Интегро-дифференциальные уравнения.* Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регулир. 1962, 1964. С. 5–372.

2. Васильев В. В. *К вопросу о решении систем линейных интегро-дифференциальных уравнений.* Иркутск: Труды ун-та, № 4953, 8:1. С. 3–8.

3. Вувуникян Ю. М., Трифонова И. В. *Эволюционный оператор второй степени кратности, порожденный системой интегро-дифференциальных уравнений* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та ім. Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. № 3(10). С. 50–60.

4. Вувуникян Ю. М. *Методы построения импульсных и спектральных характеристик системных операторов, порожденных нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями* // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2021. С. 221–226.