О ТОЧНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.П. Шилин

Продолжено исследование уравнения

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\varphi^{(k)}(t)+\frac{k!b_k}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}}\right)=f(t),\quad t\in L, \tag{1}$$

с интегралами, понимаемыми в смысле конечной части по Адамару. В этом уравнении L – простая гладкая замкнутая кривая на комплексной плоскости, $f(t)$ – H-непрерывная (т.е. удовлетворяющая условию Гельдера) заданная функция, $\varphi(t)$ – искомая функция, H-непрерывная вместе со своими входящими в уравнение производными, $n\in\mathbb{N}$. В случае постоянных коэффициентов a_k, b_k точное аналитическое решение уравнения (1) дано в [1]. В [2] указан способ исследования уравнения (1) с переменными коэффициентами вида

$$a_k=a(t)A_k(t)+b(t)B_k(t),\quad b_k=a(t)A_k(t)-b(t)B_k(t),\quad k=\overline{0,n},$$

где $a(t)$, $b(t)$ – H-непрерывные функции. При подходящем подборе функций $A_k(t)$, $B_k(t)$ возможность точного аналитического решения уравнения сохраняется. Указаны два новых таких случая.

1.

$$A_k(t)=\sum_{s=2k}^{n+k}a_{s-k,k}c_{n+k-s}t^s,\quad B_k(t)=\sum_{s=2k}^{n+k}a_{s-k,k}d_{n+k-s}t^s,$$

где c_j, d_j – заданные комплексные числа, $j=\overline{0,n}$; a_{jm} – заданные целые числа, причем

$$c_0=d_0=1,\quad a_{jj}=(-1)^j,\ a_{j0}=0,\quad j=\overline{0,n};$$

$$a_{jm}=(1-j-m)a_{j-1,m}-a_{j-1,m-1},\quad j=\overline{2,n},\quad m=\overline{1,j-1};$$

2.

$$A_k(t)=(E_k-\alpha E_{k+1})\,t-E_{k+1},\quad B_k(t)=(F_k-\beta F_{k+1})\,t-F_{k+1},$$

где α, β, E_k, F_k, $k=\overline{0,n+1}$, – заданные комплексные числа, причем

$$E_0=F_0=E_{n+1}=F_{n+1}=0,\quad E_n=F_n=1,$$

корни уравнений $\sum\limits_{k=0}^{n-1}E_{k+1}\lambda^k=0$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}F_{k+1}\lambda^k=0$ однократны,

$$\sum_{k=0}^{n-1}E_{k+1}\alpha^k\neq 0,\quad \sum_{k=0}^{n-1}F_{k+1}\beta^k\neq 0,\quad n\geqslant 2.$$

В указанных случаях проведен полный конструктивный анализ уравнения (1), решены в явном виде примеры. Решение основано на использовании обобщенных формул Сохоцкого, сводящих уравнение к краевой задаче Римана в некотором классе функций. После решения задачи Римана следует еще решать в областях комплексной плоскости линейные дифференциальные уравнения для аналитических функций с дополнительными условиями. Частично результаты содержатся в [3].

Литература

1. Зверович Э. И. *Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54. № 6. С. 5–8.
2. Шилин А. П. *Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 48–56.
3. Шилин А. П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с рекуррентными соотношениями в коэффициентах* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2022. № 2. (в печати).

ON SPECTRAL PROBLEM FOR MHD EQUATION

M.P. Dymkov, V.M. Dymkou

We are interesting the equations that govern for the simplest cases the liquid metal flow magnetohydrodynamics that, in particular, can be used in the nuclear fusion reactor.

We consider the case of a spacially periodic, incompressible, conducting fluid in a $3\,D$ cubic box Ω of size $L = L_{\text{box}}$ under imposed homogeneous and steady magnetic field B_0 aligned with the vertical direction e_z. The governing equations can be reduced to a single one involving the velocity and pressure only (see [1,2]) as follows

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = \nabla^2 u - Ha^2\nabla^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Grf(x,t), \quad \nabla\cdot u = 0,$$

where following notations are used $u(x,t)$ is the velocity-vector of the flow, $f(x,t)$ is the external forcing, $x=(x,y,x)$ is the spatial variable, t is time, $Ha = L_{\text{ref}}B_0\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho\nu}}$ is the Hartmann number and $Gr = \dfrac{L_{\text{ref}}^{3-d/2}}{\nu^2}||f||$ is the Grashoff number (d is number of spatial dimensions), ρ is the density, p is the pressure, ν is the viscosity, σ is the electrical conductivity, B_0 is the imposed magnetic field, $Re = \frac{UL_{\text{int}}}{\nu}$ is Reynolds number. The addition of periodic boundary conditions and zero initial condition $u(x,0)=0$ completely determine the problem.

In order to rewrite the considered problem in the abstract form as an initial boundary value problem and identify the operator relevant to the problem, we first need to identify the functional spaces where the solution of our problem are to be sought.

Following [3], let $H^m(\Omega)$ be the Sobolev space of functions from $L_2(\Omega)$ whose derivatives of order up to m belong to $L_2(\Omega)$. $\big(H^m(\Omega)\big)^3$ is the space of three-dimensional vector fields with components from $H^m(\Omega)$. By $L_p(\Omega;\mathcal{B})$, $1 \leqslant p < \infty$, we denote the set of functions v defined on the domain $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ with images in the given Banach space $\mathcal{B}$, for which the norm $||v||_{L_p(\Omega;\mathcal{B})} = \left(\int\limits_\Omega ||v||^p_{\mathcal{B}}dE\right)^{1/p}$ is finite. Then, define the needed spaces V, V^0, V^1 and V^2 as follows:

$$V = \big\{v(x)\in\big(H^1(\Omega)\big)^3 : \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \Omega,\ v \text{ satisfies the boundary conditions on } \partial\Omega\big\},$$

$$V^0 \text{ is the closure of } V \text{ in } \big(L_2(\Omega)\big)^3, \quad V^1 \text{ is the closure of } V \text{ in } \big(H^1(\Omega)\big)^3,$$

$$V^2 = V^1\cap\big(H^2(\Omega)\big)^3.$$