где $B_x = x^{-k}\dfrac{\partial}{\partial x}(x^k\dfrac{\partial}{\partial x}) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{k}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}$ – оператор Бесселя, $0 < k < 1$.

Рассматривается задача о нахождении функции $u(x,t)$, удовлетворяющей условиям:

$$u(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{G}_T) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_T), \qquad (1)$$

$$L_B u = 0, \quad (x,t) \in G_T, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (3)$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (4)$$

$$\left(x^{k-1}u(x,t)\right)\Big|_{x=1} + \int\limits_0^l u(x,t)x\,dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (5)$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию согласования

$$\left(x^{k-1}\varphi(x)\right)\Big|_{x=1} + \int\limits_0^l \varphi(x)x\,dx = 0. \qquad (6)$$

Теорема. *Задача (1)–(6) не может иметь более одного решения.*

Литература

1. Пулькина Л. С. *Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода* // Изв. вузов. Матем. 2012. № 4. С. 74-83.

2. Зайцева Н. В. *Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя.* М: Изд-во Московского университета, 2021.

3. Bouziani A., Oussaeif T.-E. and Benaoua L. *A Mixed Problem with an Integral Two-Space-Variables Condition for Parabolic Equation with The Bessel Operator* // Journal of Mathematics. 2013. Article ID 457631.

4. Гарипов И. Б., Мавлявиев Р. М. *Краевая задача для одного параболического уравнения с оператором Бесселя с интегральным условием первого рода* // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. В. 1. С. 5–12.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЯТОГО ПОРЯДКА

В.В. Дайняк, А.К. Андросов

В данной работе изучается задача типа Дирихле на плоскости для уравнений определенного вида пятого порядка с постоянными коэффициентами. Эти неклассические линейные дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x = (x_0, x_1)$ запишем в виде

$$\mathfrak{L}u = \Big(\frac{\partial^3}{\partial x_0^3} + a_1\frac{\partial^3}{\partial x_0 \partial x_1^2} + b_1\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big) + A(x_0,x_1)u = f(x_0,x_1), \qquad (1)$$

где $A(x_0,x_1)u = q_0(x_0,x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_0} + q_1(x_0,x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda(x_0,x_1)u$. Здесь a_1, b_1 – постоянные, коэффициенты полинома $A(x_0,x_1)$ и их производные $\frac{\partial q_i}{\partial x_0}$ $(i = 1,2)$ измеримы и ограничены. При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$, которые будут сформулированы далее и которые являются достаточными, методами функционального анализа доказывается в обобщенной постановке однозначная разрешимость уравнения (1) в произвольной области при наличии простейших граничных условий (условий типа Дирихле). Суть постановки задачи в следующем. Обозначим через Ω произвольную ограниченную область двумерного пространства переменных $x = (x_0, x_1)$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$.

Пусть $\mathfrak{L}_0(\nu) = (\nu_0^3 + a_1\nu_0\nu_1^2 + b_1\nu_1^3)(\nu_0^2 + \nu_1^2)$. В области Ω рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}|_{\partial\Omega^-} = 0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ – часть границы $\partial\Omega$ в точках которой $\mathfrak{L}_0(\nu) < 0$.

Наряду с задачей (1), (2) будем рассматривать сопряженную задачу, т.е.

$$\mathfrak{L}^+ v = g(x), \tag{3}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}|_{\partial\Omega^+} = 0, \quad \partial\Omega^+ = \big(x \in \Omega \,|\, \mathfrak{L}_0(\nu) > 0\big), \tag{4}$$

где $\mathfrak{L}^+$ – формально сопряжённый к $\mathfrak{L}$ оператор и

$$\mathfrak{L}^+ = -\Big(\frac{\partial^3}{\partial x_0^3} + a^{(1)}\frac{\partial^3}{\partial x_0 \partial x_1^2} + b^{(1)}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big) + A^*(x_0, x_1),$$

где $A^*(x_0, x_1)$ – оператор первого порядка, формально сопряженный к $A(x_0, x_1)$.

Для исследования на разрешимость поставленных задач нам нужны некоторые функциональные пространства. Обозначим $H^l(\Omega)$ $(l = 1, 2, 3)$ пространство Соболева функций, определенных в Ω с квадратично суммируемыми обобщенными производными до порядка l, $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. Пусть $H_0^l(\Omega)(\overset{0}{H}{}^l(\Omega))$, $l = 1, 2, 3,$ – подпространства пространства $H^l(\Omega)$, элементы которых удовлетворяют условиям (2), ((4)). Здесь $H_0^l(\Omega) = \overset{0}{H}{}^l(\Omega)$. Пусть $H_0^{-1}(\Omega)$ – сопряженное к $H_0^l(\Omega)$ пространство относительно канонической билинейной формы $\langle u, v\rangle$, $u \in H_0^{-1}(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$, являющейся продолжением по непрерывности билинейной формы $(u, v)_{L_2(\Omega)}$, где $u \in L_2(\Omega)$, $v \in H_0^l(\Omega)$, $(\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Задачу (1), (2) будем рассматривать как решение операторного уравнения

$$\mathfrak{L}u = f \tag{5}$$

с областью определения $D(\mathfrak{L}) = H_0^3(\Omega)$, а задачу (3), (4) как решение операторного уравнения

$$\mathfrak{L}^* v = g \tag{6}$$

с $D(\mathfrak{L}^*) = \overset{0}{H}{}^3(\Omega)$.

Построим расширение L и L^+. Будем рассматривать L и L^+ из пространства $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^{-1}(\Omega)$. В качестве расширений L и L^+ возьмем сопряженные операторы к операторам $\mathfrak{L}^+$ и $\mathfrak{L}$ соотвественно, действующие из $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^{-1}(\Omega)$. Решение уравнения

$$Lu = f \tag{7}$$

назовем *обобщенным решением задачи (1), (2) или уравнения (5)*, а решение уравнения

$$L^{+}u = g \tag{8}$$

– *обобщенным решением задачи (3), (4) или уравнения (6).*

Имеют место следующие энергетические неравенства для операторов L и L^{+}.

Теорема 1. *Если выполняются следующие условия:*

1) $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$;

2) если $a_1 = -1$, *то* $b_1 \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$;

3) если $a_1 = 0$, *то* $b_1 \in (-\infty, -\frac{\sqrt{-942+266\sqrt{57}}}{96}) \cup (\frac{\sqrt{-942+266\sqrt{57}}}{96}, +\infty)$;

4) если $a_1 = 1$, *то* $b_1 \in (-\infty, -1.21) \cup (1.21, +\infty)$,

то для любых u *и* v *из* $H_0^1(\Omega)$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\|Lu\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{9}$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c^{*}\|L^{+}v\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{10}$$

где постоянные $c > 0$ *и* $c^{*} > 0$ *не зависят от функций* u *и* v.

Теорема 2. *При выполнении условий Теоремы 1 для любого элемента* $f \in H_0^1(\Omega)$ *существует единственное обобщенное решение* u *задачи (1)–(2), а для любого элемента* $g \in H_0^1(\Omega)$ *существует единственное обобщенное решение* v *задачи (3)–(4) и справедлива оценка*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant k\|f\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{11}$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant k^{*}\|g\|_{H_0^{-1}(\Omega)}. \tag{12}$$

.

Литература

1. Корзюк В. И. *Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными* / Минск: БГУ, 2013.

2. Корзюк В. И. *Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка* // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2012. № 3. С. 116–121.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г.В. Демиденко

В монографии [1] исследовались краевые задачи для классов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной,

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор. В литературе такие уравнения часто называют *уравнениями соболевского типа.* Большой интерес к таким уравнениям был инициирован исследованиями С. Л. Соболева [2] задачи о малых колебаниях вращающейся жидкости. В настоящее время существует много теоретических и прикладных