УДК 517.968

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЯДРОМ КОШИ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

А.П. Солдатов, Т.М. Урбанович

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия;
Полоцкий государственный университет,
ул. Блохина, 29, Новополоцк, 211440, Беларусь
e-mail:Soldatov@bsu.edu.ru, UrbanovichTM@gmail.com

Аннотация. Исследуется характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае (с особенностями нецелого порядка). Получены условия разрешимости и явная формула представления решения.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, задача линейного сопряжения.

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [1, с. 188]

$$c(t)\varphi(t) + \frac{d(t)}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

где коэффициенты $c(t)$, $d(t)$ принадлежат классу Гёльдера $H = H(\overline{\mathbb{R}})$ на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$. Более точно, функции $\varphi(t) \in H(\overline{\mathbb{R}})$ удовлетворяют условию Гёльдера

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le C\left|\frac{1}{t_1 + i} - \frac{1}{t_2 + i}\right|^{\mu}, \quad t_j \in \mathbb{R}\,,$$

с некоторыми постоянными $C > 0$ и $0 < \mu < 1$. В частности, функция $\varphi(t)$ допускает предел $\varphi(\infty) = \lim \varphi(t)$ при $t \longrightarrow \infty$. При дробно-линейной подстановке, переводящей прямую $\mathbb{R}$ на единичную окружность L, класс $H(\overline{\mathbb{R}})$ переходит в класс $H(L)$.

Уравнение (1) является уравнением нормального типа, если $c(t) \pm d(t) \neq 0$ всюду на $\overline{\mathbb{R}}$. Хорошо известно [1, с. 188], что в этом случае, с помощью сведения к эквивалентной задаче линейного сопряжения, уравнение (1) допускает эффективное решение в классе $H^0 = \big\{\varphi(t) \in H(\overline{\mathbb{R}})|\ \varphi(\infty) = 0\big\}$.

Исключительный случай уравнения (1) возникает, когда функции $c(t) \pm d(t)$ допускают нули в конечном числе точек действительной прямой:

$$\begin{aligned} &(c + d)(t) = O\left(|t - a_j|^{\alpha_j}\right) \quad \text{при} \quad t \to a_j, \quad j = 1, 2, ..., m,\\ &(c - d)(t) = O\left(|t - b_k|^{\beta_k}\right) \quad \text{при} \quad t \to b_k, \quad k = 1, 2, ..., n, \end{aligned} \tag{2}$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ и $a_j \neq b_k$.

В случае целых положительных α_j, β_k, в предположении (2) и гладкого замкнутого контура интегрирования Γ, уравнение (1) методом сведения к эквивалентной задаче линейного сопряжения было впервые рассмотрено Ф.Д. Гаховым [2] и Л.А. Чикиным [3].

Д.И. Шерман [4], [5] независимо от работ [2] и [3] другим методом дал исследование исключительных случаев уравнений с ядром Коши в предположении, что только одна из функций $(c \pm d)(t)$ имеет нули целых порядков на контуре Γ.

В данной работе рассматривается исключительный случай характеристического сингулярного интегрального уравнения (1) в предположении, что функции $(c \pm d)(t)$ имеют на контуре нули нецелых порядков, причём $0 < \alpha_j < 1$, $0 < \beta_k < 1$.

Положим

$$A(t) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{t - a_j}{t - a'_j} \right)^{\alpha_j}, \; B(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{t - b_k}{t - b'_k} \right)^{\beta_k},$$

где точки $a'_j, b'_k \in \mathbb{C}$ лежат вне действительной оси и ветви соответствующих степенных множителей выбраны с разрезом вдоль отрезков $\left[a_j,\ a'_j\right]$, $[b_k,\ b'_k]$. В этих обозначениях условия (2) уточняются следующим образом:

$$(c + d)(t) = r(t)A(t), \quad (c - d)(t) = s(t)B(t),$$

где функции $r(t)$, $s(t)$ принадлежат классу $H(\overline{\mathbb{R}})$ и всюду отличны от нуля.

Предполагая $f \in H$ и $f(\infty) = 0$, решение уравнения (1) будем отыскивать в классе $H^* = H^*(\overline{\mathbb{R}})$ функций, которые принадлежат H вне любой окрестности точек a_j и b_k и допускают в этих точках слабые особенности. Более точно, этот класс состоит из функций вида

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0(t)}{(t - a_1) \cdots (t - a_m)(t - b_1) \cdots (t - b_n)} + \varphi_1(t),$$

где $\varphi_0, \varphi_1 \in H$ и $\varphi_0(a_j) = \varphi_0(b_k) = 0$ для всех k, j.

Введем индекс Коши

$$æ = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{s(t)}{r(t)} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

и рассмотрим функцию

$$h(t) = \ln \frac{s(t)}{r(t)} - æ \ln \left(\frac{t - i}{t + i} \right),$$

которая, очевидно, принадлежит классу $H(\overline{\mathbb{R}})$. Хорошо известно [1], [6], что тогда интеграл типа Коши

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\tau) - h(\infty)}{\tau - z} d\tau, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R},$$

принадлежит классу $H(\overline{D^{\pm}} \cup \infty)$ в каждой из полуплоскостей $D^{\pm} = \{\pm \mathrm{Im} z > 0\}$. Положим

$$X(z) = \begin{cases} \exp[H(z)], & \mathrm{Im} z > 0, \\ \exp[H(z)] \left(\dfrac{z + i}{z - i} \right)^{æ}, & \mathrm{Im} z < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $X^{\pm}(t) \in H(\overline{\mathbb{R}})$ и всюду отлична от нуля, причём

$$X^{+}(t) = \frac{s(t)}{r(t)} X^{-}(t). \tag{3}$$

Представим $A(t)$, $B(t)$ в следующем виде:

$$A(t) = A_{+}(t)A_{-}(t)\,, \qquad B(t) = B_{+}(t)B_{-}(t)\,,$$

где

$$A_{\pm}(z) = \prod_{\pm Im a'_j<0} \left(\frac{z-a_j}{z-a'_j}\right)^{\alpha_j}, \qquad B_{\pm}(z) = \prod_{\pm Im b'_k<0} \left(\frac{z-b_k}{z-b'_k}\right)^{\beta_k},$$

и введём сингулярный оператор

$$(Nf)(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A(t)r(t)} + \frac{1}{B(t)s(t)}\right) f(t) \; + \\ + \; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A(t)r(t)} - \frac{1}{B(t)s(t)}\right) \frac{Y(t)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau - t)} d\tau\,,$$

где $Y(t) = r(t)A_{-}(t)B_{+}(t)X^{+}(t)$.

Теорема 1. *Пусть $f \in H(\overline{\mathbb{R}})$ и $f(\infty) = 0$. Тогда при $æ \geq 0$ уравнение (1) безусловно разрешимо в классе $\{\varphi \in H^{*}(\overline{\mathbb{R}}),\ \varphi(\infty) = 0\}$, и его общее решение даётся формулой*

$$\varphi(t) = (Nf)(t) + \left(\frac{1}{A(t)r(t)} - \frac{1}{B(t)s(t)}\right) \sum_{k=1}^{æ} p_k \frac{Y(t)}{(t+i)^k} \tag{4}$$

с произвольными коэффициентами $p_k \in \mathbb{C}$.

Если $æ < 0$, то для существования решения необходимо и достаточно выполнение $-æ$ условий разрешимости

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau + i)^{k+1}} d\tau\,, \qquad k = 0, 1, ..., -æ - 1\,, \tag{5}$$

и (единственное) решение уравнения (1) даётся равенством $\varphi(t) = (Nf)(t)$.

□ Введём кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau\,,$$

заданную интегралом типа Коши, плотностью которого служит искомое решение характеристического уравнения (1).

Согласно формулам Сохоцкого, имеем

$$\varphi(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t)\,, \qquad \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t)\,. \tag{6}$$

Подставив эти формулы в уравнение (1), получим, что кусочно-аналитическая функция $\Phi(z)$ должна являться решением задачи линейного сопряжения

$$A(t)r(t)\Phi^+(t) - B(t)s(t)\Phi^-(t) = f(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{7}$$

$\square$ Введём кусочно-аналитическую функцию

$$\Psi(z) = \begin{cases} A_+B_+^{-1}(z)\Phi(z), \ \mathrm{Im}z > 0, \\ B_-A_-^{-1}(z)\Phi(z), \ \mathrm{Im}z < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда краевое условие (7) перепишется в виде

$$\Psi^+(t) - G(t)\Psi^-(t) = g(t)\,, \tag{9}$$

где

$$G(t) = \frac{s(t)}{r(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{A_-(t)B_+(t)r(t)}\,.$$

В этих обозначениях (3) можно записать в форме $X^+ = GX^-$, причем $X(z)$ представима в виде $X(z) = (z+i)^{æ}X_0(z)$, где X_0 аналитична вне действительной прямой и всюду отлична от нуля. Поэтому общее решение задачи (9) дается формулой

$$\Psi(z) = X(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau - z)}d\tau + \sum_{k=1}^{æ}\frac{p_k}{(z+i)^k}\right),$$

где учтено, что $g/X^+ = f/Y$ и функция f удовлетворяет условиям ортогональности (5), обеспечивающим отсутствие полюса функции Ψ в точке $z=-i$. Конечно, при $æ \geqslant 0$ эти условия отсутствуют, а при $æ \leqslant 0$ отсутствует сумма с p_k.

Таким образом, при $æ > 0$ краевая задача (9) безусловно разрешима и её решение зависит линейно от $æ$ произвольных постоянных. При $æ \leq 0$ решение задачи (9) единственно, причём при $æ < 0$ для существования решения необходимо и достаточно выполнение $-æ$ условий разрешимости (5).

Из формулы (8) следует, что

$$\Phi^+(t) = \frac{B_+(t)}{A_+(t)}\Psi^+(t)\,, \quad \Phi^-(t) = \frac{A_-(t)}{B_-(t)}\Psi^-(t)\,.$$

Таким образом, по формулам (6) найдём решение сингулярного интегрального уравнения (1):

$$\varphi(t) = \frac{B_+(t)}{A_+(t)}\Psi^+(t) - \frac{A_-(t)}{B_-(t)}\Psi^-(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{B_+(t)}{A_+(t)}X^+(t)\left(\frac{g(t)}{X^+(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau - t)}d\tau + p(t)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{A_-(t)}{B_-(t)}X^-(t)\left(-\frac{g(t)}{X^+(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau - t)}d\tau + p(t)\right),$$

где положено

$$p(t) = \sum_{k=1}^{æ} \frac{p_k}{(t+i)^k} \, .$$

В результате, после элементарных преобразований, приходим к выражению (4) для общего решения задачи (1), что завершает доказательство теоремы. То, что это решение принадлежит классу $\{\varphi \in H^*, \ \varphi(\infty) = 0\}$, следует из общих свойств интеграла типа Коши [1], [6]. ■

Принадлежность решения φ классу H^* в теореме можно несколько уточнить. Воспользуемся следующим свойством интеграла типа Коши.

Лемма 1. *Пусть* $f \in H[-2,2]$ *и функция* t^α, $0 < \alpha < 1$, *на вещественной прямой понимается как граничное значение аналитической функции* z^α, *рассматриваемой в верхней или нижней полуплоскости. Тогда функция*

$$g(t_0) = \frac{t_0^\alpha}{\pi i} \int_{-2}^{2} \frac{f(t)dt}{t^\alpha (t-t_0)} \, , \qquad -1 \leqslant t_0 \leqslant 1 \, , \tag{10}$$

принадлежит классу $H[-1,1]$.

□ Запишем $g = g_0 + g_1$, где

$$g_1(t_0) = f(0) \frac{t_0^\alpha}{\pi i} \int_{-2}^{2} \frac{dt}{t^\alpha (t-t_0)} \, ,$$

$g_0(t_0)$ определяется по $f(t) - f(t_0)$ аналогично (10). Тогда, в силу известных свойств интеграла типа Коши [1], [6], функция $g_0 \in H[-1,1]$ и $g_0(0) = 0$. С другой стороны, по теореме Коши

$$\int_{-2}^{2} \frac{dt}{t^\alpha (t-z)} + \int_L \frac{dt}{t^\alpha (t-z)} = 0 \, , \quad \mathrm{Im} z < 0 \, ,$$

где L — дуга окружности $\{|z| = 2, \mathrm{Im} z > 0\}$. Поэтому по формуле Сохоцкого-Племеля

$$g_1(t_0) = f(0) \left[1 - t_0^\alpha \int_{-2}^{2} \frac{dt}{t^\alpha (t-t_0)} \right] \in H[-1,1] \, ,$$

так что и функция g принадлежит классу $H[-1,1]$. ■

Лемма 2. *Оператор* $f(t) \to A(t)B(t)(Nf)(t)$ *инвариантен в классе* $\{f \in H(\overline{\mathbb{R}}),$ $f(\infty) = 0\}$.

□ Выполним элементарные преобразования:

$$A(t)B(t)(Nf)(t) = \frac{A(t)B(t)}{2} \left(\frac{1}{A(t)r(t)} + \frac{1}{B(t)s(t)} \right) f(t) +$$

$$+ \frac{A(t)B(t)}{2} \left(\frac{1}{A(t)r(t)} - \frac{1}{B(t)s(t)} \right) \frac{Y(t)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau - t)} d\tau =$$

$$= \frac{c(t)f(t)}{r(t)s(t)} - \frac{d(t)}{r(t)s(t)}\frac{Y(t)}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau-t)}d\tau\,.$$

По условию функции $c(t)$, $d(t)$, $r(t)$, $s(t)$ всюду отличны от нуля и принадлежат классу $H(\overline{\mathbb{R}})$ и этим же свойством обладает функция $X^+(t)$. Поэтому нужно только проверить, что в классе $f(t)\in H$, $f(\infty)=0$ инвариантен сингулярный оператор

$$(S^*f)(t) = \frac{Y(t)}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)d\tau}{Y(\tau)(\tau-t)}\ ,$$

где, напомним, $Y = rA_-B_+X^+$. В силу известных свойств сингулярного интеграла [6] достаточно убедиться, что $(S^*f)(t_0)\in H$ в окрестности точек a_j и b_k, фигурирующих в определении A_- и B_+. Зафиксируем для определенности одну из этих точек $a = a_j$ и выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, что остальные точки a_i и b_k лежат вне отрезка $[-2\varepsilon + a, a + 2\varepsilon]$. Тогда на этом отрезке можем записать

$$Y(t) = \widetilde{Y}(t)(t-a)^\delta, \quad \delta = \delta_j\,,$$

где $\widetilde{Y}\in H[-2\varepsilon+a, a+2\varepsilon]$ и в соответствии с определением A_- функция $(t-a)^\delta$ определяется по ее непрерывной ветви в верхней полуплоскости. В частности, $\widetilde{f}(t) = f(t)\widetilde{Y}^{-1}(t)\in H[-2\varepsilon + a, a + 2\varepsilon]$. В этих обозначениях

$$(S^*f)(t) = \widetilde{Y}(t_0)\widetilde{g}(t) + g_0(t), \quad -\varepsilon + a \leqslant t_0 \leqslant a + \varepsilon\,,$$

с некоторой функцией $g_0 \in H[-\varepsilon + a, a + \varepsilon]$ и

$$\widetilde{g}(t) = \frac{(t-a)^\delta}{\pi i}\int_{-2\varepsilon+a}^{a+2\varepsilon}\frac{\widetilde{f}(\tau)d\tau}{(\tau-a)^\delta(\tau-t)}\ .$$

Остается заметить, что на основании леммы 1 функция $\widetilde{g}\in H[-\varepsilon + a, a + \varepsilon]$. ■

Заключение. В работе исследовано характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае (с особенностями нецелого порядка) методом сведения к эквивалентной задаче линейного сопряжения. Получены условия разрешимости и явная формула представления решения.

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения // Известия Казанского физ-матем. общества – 1949. – 14;3. – С.75-160.
3. Чикин Л.А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Учёные записки Казанского гос. ун-та им. В.И. Ульянова-Ленина. – 1953. – 113;10. – С.57-105.

4. Шерман Д.И. Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1951. – 15;1. – С.75-82.

5. Шерман Д.И. О приёмах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1948. – 12;4. – С.423-452.

6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

CHARACTERISTIC SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH THE CAUCHY KERNEL IN EXCEPTIONAL CASE

A.P. Soldatov, T.M. Urbanovich

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia;
Polotsk State University,
Blohina St., 29, Novopolotsk, 211440, Belarus,
e-mail:Soldatov@bsu.edu.ru, UrbanovichTM@gmail.com

Abstract. Characteristic singular integral equation with the Cauchy kernel in the exceptional case (with singularities of noninteger order) is investigated. The solvability conditions and the explicit solution formula are obtained.

Key words: characteristic singular integral equation with the Cauchy kernel, linear conjugation problem.