– для разбавленной фазы:

$$U_2\frac{\partial Z_2}{\partial x} = A\,(Z_1 - Z_2), \tag{3}$$

$$U_2\frac{\partial T_2}{\partial x} = B\,(T_1 - T_2). \tag{4}$$

Граничные условия:

$$x = 0, \quad Z_1 = Z_2 = 0, \quad T_1 = T_{01}(r), \quad T_2 = T_0^{''}, \tag{5}$$

$$r = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} = 0,$$

$$r = 1; \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} + B_i(T_1 - T^{'}) = 0. \tag{6}$$

Здесь используются обозначения принятые в работе [2].

Решая уравнения (1)–(4) с учетом граничных условий (5), (6), получаем стационарное продольное изменение степени продвижения реакции плотной и разбавленной фазы.

Расчеты также показали, что при изменении значений интенсивности массообмена между фазами скорости потока и степенью неоднородности потока значение $\gamma(T)$ остается в промежутке [0,1]. Таким образом, вышеизложенный анализ показывает, что при изменении допустимых значений гидродинамических параметров, значения функций всегда остаются в промежутке $0 \leqslant \gamma(T) < 1$.

Литература

1. Гупало Ю. П., Острик В. М. *О стационарных режимах работы химических реакторов с продольным и поперечным перемешиванием* // ПММ. 1983. Т. 47. В. 1. С. 73.

2. Абдурахимов А., Холиков Д. *Исследование области существования реактора стационарных режимов* // Проблемы механики. 2020. № 2. С. 27–31.

3. Lie Gowin C. R., Perlmutter D. D. *Tubular reactor steady state and stability characteristics. III. Effect of recycle* // AJChE J. 1971. V. 17. P. 842.

МЕТОД ОЗР И МЕТОД ОМФ В УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

И.Е. Андрушкевич

Особую популярность при построении аналитических решений нелинейных уравнений математической физики имеет метод обратной задачи рассеяния (ОЗР). При использовании метода ОЗР «... *уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) интегрируется с помощью перехода от потенциала одномерного уравнения Шредингера к коэффициенту отражения на этом потенциале; при эволюции потенциала в силу КдФ зависимость коэффициента отражения от времени оказывается тривиальной и* ... *задача интегрирования КдФ приводит к задаче о восстановлении потенциала по данному коэффициенту отражения – обратной задаче квантовой теории рассеяния*...» [1, с. 21].

Технология применения метода ОЗР к настоящему времени отработана в мельчайших подробностях. Единственной преградой на пути его универсальности, на наш взгляд, является отсутствие общих методов построения «пары Лакса» – пары линейных операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}$ таких, что выражение

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{A},\mathbf{L}\right]=\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t}+\mathbf{AL}-\mathbf{LA}=0$$

совпадает с исследуемым эволюционным уравнением.

Успех метода ОЗР на определенное время затмил сильные стороны других подходов, в частности, методов разделения переменных.

Классический метод Фурье разделения переменных (КМФ) Р. Курант относил к специальным методам, и считал его «*…самым важным из этих методов…*» (см., например, [2, с. 30]). Суть КМФ заключается в том, что решение дифференциального уравнения в частных производных ищется как суперпозиция частных решений, представимых в виде произведения функции от пространственной переменной на функцию от времени. В отличие от КМФ, обобщенный метод Фурье (ОМФ) [3], рассматривая дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$\mathbf{D}(u(x,t))=F(x,t), \tag{1}$$

где $\mathbf{D}$ – дифференциальный оператор, $u(x,t)$ – неизвестная функция, $F(x,t)$ – неоднородность, M, K – натуральные числа, исходит из того, что справедливо представление

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{M}\chi_i(x)\tau_i(t), F(x,t)=\sum_{i=1}^{K}X_i(x)T_i(t), \tag{2}$$

и уравнение (1) сводится к билинейному функциональному (БФУ)

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\left(x\right)\psi_i\left(t\right)=0. \tag{3}$$

Основы теории построения решений БФУ сформулированы в [3]; ее применение позволяет сопоставлять уравнению в частных производных (1) наборы систем обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируя которые можно получить частные решения исходного уравнения.

Поскольку метод ОЗР изначально был разработан и успешно применен для уравнения Кортевега–де Фриза, применим ОМФ и мы к этому уравнению.

Уравнение Кортевега–де Фриза в канонической форме имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-6u\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{4}$$

Известны его одно- и двухсолитонные решения (5), (7):

$$u(x,t)=\frac{-\vartheta^2}{2\cosh^2\left\{\frac{1}{2}\left(\vartheta x-\vartheta^3 t-c_1\right)\right\}}; \tag{5}$$

$$u(x,t)=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln v(x,t), \tag{6}$$

$$v(x,t)=1+c_1e^{-\vartheta_1 x+\vartheta_1^3 t}+c_2e^{-\vartheta_2 x+\vartheta_2^3 t}+c_1c_2\left(\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}\right)^2 e^{-(\vartheta_1+\vartheta_2)x+\left(\vartheta_1^3+\vartheta_2^3\right)t}, \tag{7}$$

где ϑ, ϑ_1, ϑ_2, c_1, c_2 – постоянные. Оба решения получены методом ОЗР и считаются единственными в своем роде.

ОМФ позволил нам получить следующие новые односолитонные решения:

$$u(x,t) = \frac{-4c_3\vartheta^4}{4c_3\vartheta^2 - e^{\vartheta x - \vartheta^3 t - c_1} - 4c_3^2\vartheta^4 e^{-\vartheta x + \vartheta^3 t + c_1}}, \tag{8}$$

$$u(x,t) = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\ \vartheta^2}{2 + \frac{\exp\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\vartheta x - \vartheta^3 - c_1}{c_3\left(1+i\sqrt{3}\right)\vartheta^2} + c_3\left(1+i\sqrt{3}\right)\vartheta^2 \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\vartheta x + \vartheta^3 + c_1\right)}. \tag{9}$$

При выборе значения постоянной $c_3 = -\left(2\vartheta^2\right)^{-1}$ решение (8) совпадает с хорошо известным солитонным решением (5). Помимо известного двухсолитонного решения (7), с помощью ОМФ нам удается получить и ряд новых:

$$v(x,t) = 1 + c_1 e^{-\vartheta_1 x + \vartheta_1^3 t} + c_2 e^{\vartheta_2\left(1+i\sqrt{3}\right)/2\cdot x + \vartheta_2^3 t} +$$

$$+c_1c_2\left(\frac{2\vartheta_1 + \vartheta_2(1+i\sqrt{3})}{2\vartheta_1 - \vartheta_2(1+i\sqrt{3})}\right)^2 e^{\left(-\vartheta_1 + \vartheta_2(1+i\sqrt{3})/2\right)x + \left(\vartheta_1^3 + \vartheta_2^3\right)\ t}, \tag{10}$$

$$v(x,t) = 1 + c_1 e^{\vartheta_1\left(1+i\sqrt{3}\right)x/2 + \vartheta_1^3 t} +$$

$$+c_2 e^{\vartheta_2\left(1+i\sqrt{3}\right)x/2 + \vartheta_2^3 t} + c_1c_2\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}\right)^2 e^{(\vartheta_1+\vartheta_2)\left(1+i\sqrt{3}\right)x/2 + \left(\vartheta_1^3+\vartheta_2^3\right)t}, \tag{11}$$

$$v(x,t) = 1 + c_1 e^{\vartheta_1\left(1+i\sqrt{3}\right)x/2 + \vartheta_1^3 t} + c_2 e^{\vartheta_2\left(1-i\sqrt{3}\right)x/2 + \vartheta_2^3 t} +$$

$$+c_1c_2\left(\frac{\vartheta_1(1+i\sqrt{3}) - \vartheta_2(1-i\sqrt{3})}{\vartheta_1(1+i\sqrt{3}) + \vartheta_2(1-i\sqrt{3})}\right)^2 e^{\left(\vartheta_1\left(1+i\sqrt{3}\right)/2 + \vartheta_2\left(1-i\sqrt{3}\right)/2\right)x + \left(\vartheta_1^3+\vartheta_2^3\right)t}. \tag{12}$$

В заключение заметим, что ОМФ позволяет нам строить как все известные решения КДФ, полученные методом ОЗР, так и ряд принципиально новых.

Литература

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов: метод обратной задачи.* М.: Наука, 1980.

2. Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики. Т. 2. Уравнения с частными производными. Перевод с английского Т.Д. Вентцель под редакцией О.А. Олейник.* М.: Мир, 1964.

3. Андрушкевич И. Е. *Методы разделения переменных в волновых уравнениях.* Новополоцк: ПГУ, 2010.