

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В.М. Волков, Е.И. Мацулевич, Дун Цзинхуэй

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного эллиптического уравнения в прямоугольной области:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y), \quad (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \quad (1)$$

$$u(x = \pm 1, y) = u(x, y = \pm 1) = 0. \quad (2)$$

В общем случае коэффициенты задачи σ_{xx} , σ_{yy} и $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ являются функциями координат и удовлетворяют условию эллиптичности.

Для численного решения данной задачи используем спектральный метод Чебышева [1]. На сетке узлов

$$\omega_h = \left\{ (x_k, y_m), \quad x_n = y_n = \cos \frac{n\pi}{N+1}, \quad n = k = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, N} \right\}, \quad (3)$$

дифференциальная задача (1), (2) сводится к системе алгебраических уравнений

$$AU = F, \quad (4)$$

где F и U – векторы значений функции правой части и приближенного решения уравнения (1) в узлах сетки (3), матрица $A \in R^{N^2 \times N^2}$ имеет блочную структуру и строится на основе матриц спектрального дифференцирования Чебышева [1].

Для решения системы (4) используем метод бисопряженных градиентов (BiCG) [2] с переобуславлителем $P = D\Lambda$, где Λ – разностный аналог оператора Лапласа на сетке (3), D – диагональная матрица, элементы которой

$$d_{kk} = \sigma_{xx}(x_i, y_j) + \sigma_{yy}(x_i, y_j), \quad k = i + j(N-1).$$

Диагональная часть переобуславливателя применяется непосредственно к системе (4) до начала вычислений, а для обращения переобуславливателя Λ на каждой итерации воспользуемся итерационным методом переменных направлений (МПН) с оптимальным набором итерационных параметров [3].

Таким образом, для реализации спектральной модели использованы два вложенных итерационных алгоритма. На внешнем цикле используется метод BiCG, а на внутреннем – МПН. Целью данной работы является исследование поведения внешнего итерационного метода при снижении требований точности на внутренних итерациях. В частности, основной вопрос состоит в оценке минимального количества внутренних итераций, позволяющего достичь наискорейшую сходимость итерационного алгоритма в целом. Для выяснения вопроса воспользуемся методом численного эксперимента.

Рассмотрим модельную задачу (1), (2) с коэффициентами и правой частью, обеспечивающими заданное точное решение:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx} = \exp(-\eta(x^2 + y^4)), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0, \quad u(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1) \exp(x^2 + y^2).$$

Определим относительную норму невязки метода biCG $\varepsilon = 10^{-10}$. Для достижения такой точности МПН на сетке (3) с количеством узлов $N = 100 \div 250$ реализация переобуславливается в виде двумерного разностного оператора Лапласа согласно

оценкам [3] требует $41 \div 47$ внутренних итераций. Результаты численных экспериментов показывают, что такое количество итераций является существенно завышенным.

На рис. 1 а. представлены зависимости количества внешних BiCG итераций от размерности сетки при разном фиксированном количестве внутренних итераций МПН, $\eta = 1$. Как видно из рисунка, достаточно всего лишь 7 внутренних итераций для того, чтобы количество внешних итераций утратило зависимость, как от размерности сетки N , так и от увеличения количества внутренних итераций. В определенном смысле количество внутренних итераций $K = 7 \pm 1$ может рассматриваться как оптимальное, так как именно в этом интервале наблюдаются минимальные общие вычислительные затраты для достижения заданной точности (см. рис. 1. б). Об этом говорят и результаты численных экспериментов для других параметров задачи. Например, при увеличении неоднородности коэффициентов, $\eta = 2 \div 4$, количество внешних итераций возрастает, но их минимальное значение по-прежнему достигается при $K = 7 \pm 1$. Следует отметить, что увеличение числа внутренних итераций выше $K > 7$, часто влечет за собой рост числа внешних итераций, что указывает на нетривиальность выбора оптимального значения K .

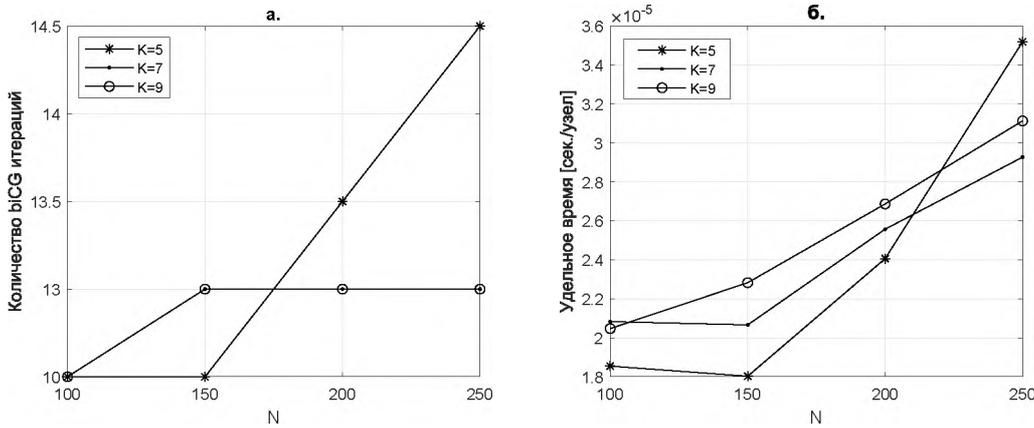


Рис. 1. Зависимости количества внешних BiCG итераций и удельного времени решения задачи от размерности сетки при различном количестве внутренних МПН итераций.

В случае $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \neq 0$ матрица A системы (4) не является разреженной, поэтому вычисление произведения данной матрицы на вектор следует реализовывать в три этапа: умножения матрицы спектрального дифференцирования на двумерный массив решения, поэлементного умножения полученного массива на массив значений соответствующих коэффициентов и последующего умножения результата на матрицу спектрального дифференцирования. Производной по x соответствует умножение слева матрицы спектрального дифференцирования C на двумерный массив решения U , в котором столбцы массива содержат распределение решения вдоль оси x для каждого значения y_k , $k = \overline{1, N}$. Для вычисления производной по y используем произведение UC^T . В остальном структура метода не меняется и зависимость сходимости внешних итераций от количества внутренних итераций качественно аналогична рассмотренному выше случаю. Рассмотренный метод может быть использован для численного решения задач в области более сложной геометрии [4].

Литература

1. Trefethen L. N. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia: SIAM, 2000.
2. Van der Vorst H. A. *BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems* // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1992. V. 13, № 2. P. 631–644.

3. Самарский А. А., Николаев Е. С. *Методы решения сеточных уравнений*. М.: Наука, 1978.

4. Orszag S. A. *Spectral methods for problems in complex geometrics // Numerical methods for partial differential equations*. Academic Press, 1979. P. 273–305.

ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЙ БИОМАССЫ ЭКОСИСТЕМЫ «ЛЕС – ПОЧВА»

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц

Известно, что «лесная растительность с момента образования сомкнутого древостоя активно воздействует на почву, изменяя ее свойства. Происходящие изменения в почве связаны с видовым составом лесообразующих пород лесного биоценоза» [1].

Для математического описания сосуществования (взаимодействия) лесной растительности и почвы предлагается [2] следующая система дифференциальных уравнений, описывающая биоценоз «лес–почва»:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = f_1(B, P, \mu) = rB \left(1 - \frac{B}{k}\right) - \alpha w P, \\ \frac{dP}{dt} = f_2(B, P, \mu) = \gamma(p - P^2)P + \delta w^2 B. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $B(t)$ – биомасса леса, $P(t)$ – мера плодородия почвы, p – мера типа почвообразующей породы, w – влажность почвы, $r, k, \alpha, \gamma, \delta > 0$ – константы. Параметр μ – это либо r , либо γ , либо p на выбор исследователя.

Стационарные равновесия (B, P) биоценоза «лес–почва», при которых биомасса (относительно) постоянна некоторое время, находим, решая систему уравнений

$$\frac{dB}{dt} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = 0,$$

или

$$\begin{cases} rB \left(1 - \frac{B}{k}\right) - \alpha w P = 0, \\ \gamma(p - P^2)P + \delta w^2 B = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Имеем очевидное стационарное равновесие $R_0 = (B_0, P_0) = (0, 0)$. Остальные равновесия – это решения системы

$$\begin{cases} \left(\frac{\gamma pr}{\alpha w} + v\delta w\right)B - \frac{\gamma pr}{\alpha w K} B^2 - \frac{\gamma r^3}{\alpha^3 w^3} B^3 + \frac{3\gamma r^3}{\alpha^3 w^3 K} B^4 - \frac{3\gamma pr^3}{\alpha^3 w^3 K^2} B^5 + \frac{\gamma pr^3}{\alpha^3 w^3 K^3} B^6 = 0, \\ P = \frac{\gamma r}{\alpha w} B \left(1 - \frac{\gamma B}{K}\right). \end{cases} \quad (3)$$

Первое уравнение системы (3) даёт решение $B_0 = 0$, и затем поиск корней сводится к решению уравнения 5-й степени по B . Следовательно, имеется, как минимум, ещё один действительный корень B_1 . Остаётся найти корни уравнения 4-й степени.

Однако, например, при

$$r = \alpha = \beta = \gamma = w = K = 1, \quad p = 2, \quad \delta = 20$$

это уравнение 4-й степени не имеет действительных корней. В данном случае имеем стационарное равновесие $R_1 = (B_1, P_1) \approx (-1, 4; -3, 36)$.