

3. Самарский А. А., Николаев Е. С. *Методы решения сеточных уравнений*. М.: Наука, 1978.

4. Orszag S. A. *Spectral methods for problems in complex geometrics // Numerical methods for partial differential equations*. Academic Press, 1979. P. 273–305.

ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЙ БИОМАССЫ ЭКОСИСТЕМЫ «ЛЕС – ПОЧВА»

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц

Известно, что «лесная растительность с момента образования сомкнутого древостоя активно воздействует на почву, изменяя ее свойства. Происходящие изменения в почве связаны с видовым составом лесообразующих пород лесного биоценоза» [1].

Для математического описания сосуществования (взаимодействия) лесной растительности и почвы предлагается [2] следующая система дифференциальных уравнений, описывающая биоценоз «лес–почва»:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = f_1(B, P, \mu) = rB \left(1 - \frac{B}{k}\right) - \alpha w P, \\ \frac{dP}{dt} = f_2(B, P, \mu) = \gamma(p - P^2)P + \delta w^2 B. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $B(t)$ – биомасса леса, $P(t)$ – мера плодородия почвы, p – мера типа почвообразующей породы, w – влажность почвы, $r, k, \alpha, \gamma, \delta > 0$ – константы. Параметр μ – это либо r , либо γ , либо p на выбор исследователя.

Стационарные равновесия (B, P) биоценоза «лес–почва», при которых биомасса (относительно) постоянна некоторое время, находим, решая систему уравнений

$$\frac{dB}{dt} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = 0,$$

или

$$\begin{cases} rB \left(1 - \frac{B}{k}\right) - \alpha w P = 0, \\ \gamma(p - P^2)P + \delta w^2 B = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Имеем очевидное стационарное равновесие $R_0 = (B_0, P_0) = (0, 0)$. Остальные равновесия – это решения системы

$$\begin{cases} \left(\frac{\gamma pr}{\alpha w} + v\delta w\right)B - \frac{\gamma pr}{\alpha w K} B^2 - \frac{\gamma r^3}{\alpha^3 w^3} B^3 + \frac{3\gamma r^3}{\alpha^3 w^3 K} B^4 - \frac{3\gamma pr^3}{\alpha^3 w^3 K^2} B^5 + \frac{\gamma pr^3}{\alpha^3 w^3 K^3} B^6 = 0, \\ P = \frac{\gamma r}{\alpha w} B \left(1 - \frac{\gamma B}{K}\right). \end{cases} \quad (3)$$

Первое уравнение системы (3) даёт решение $B_0 = 0$, и затем поиск корней сводится к решению уравнения 5-й степени по B . Следовательно, имеется, как минимум, ещё один действительный корень B_1 . Остаётся найти корни уравнения 4-й степени.

Однако, например, при

$$r = \alpha = \beta = \gamma = w = K = 1, \quad p = 2, \quad \delta = 20$$

это уравнение 4-й степени не имеет действительных корней. В данном случае имеем стационарное равновесие $R_1 = (B_1, P_1) \approx (-1, 4; -3, 36)$.

Но возможен ли переход от стационарных равновесий к циклическим, наличие которых описывается в литературе? Возможен. И математически для системы (1) это обнаруживается через механизм бифуркаций Андронова-Хопфа [3,4].

В самом деле, рассмотрим стационарное равновесие $R_0 = (B_0, P_0) = (0, 0)$. Для него вычисляем собственные числа, решая уравнения

$$\det \left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(B, P)}(B_0, P_0) - \lambda E \right| = 0.$$

При выполнении неравенства $(r - \gamma p)^2 < 4\alpha\delta w^3$ имеем пару комплексно-сопряжённых корней, причем

$$\operatorname{Re} \lambda = \frac{1}{2}(r + \gamma p), \quad \frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d\mu} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}p, \quad \frac{1}{2}\gamma > 0$$

с параметром μ , оговоренным выше.

Следовательно, по теореме Андронова-Хопфа [3, 4] может установиться автоколебание во всех трёх случаях параметра μ . При потере устойчивости равновесия $R_0 = (B_0, P_0) = (0, 0)$ биоценоз претерпевает бифуркацию Андронова-Хопфа. Второе равновесие $R_1 = (B_1, P_1)$ таким свойством не обладает.

Хотя, видимо, следует говорить не о простых автоколебаниях, а о катастрофических автоколебаниях, которые являются следствием грандиозных изменений климата или ураганов.

Равновесия R_0, R_1 не являются реальными равновесиями, поскольку в реальной ситуации

$$B(t) > 0, \quad P(t) > 0,$$

т. е. биомасса и мера плодородия почвы — положительные величины, и, следовательно, нужно брать ненулевые положительные значения для координат равновесия. Но в действительности вместо уравнения (1) можно рассматривать систему

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = r(B - B_*) \left(1 - \frac{(B - B_*)}{k} \right) - \alpha w(P - P_*), \\ \frac{dP}{dt} = \gamma [p - (P - P_*)^2] (P - P_*) + \delta w^2 (B - B_*), \end{cases} \quad (5)$$

где $B_*, P_* > 0$ — величины, осуществляющие сдвиг в пространстве (B, P) к реальным значениям равновесий системы «лес-почва».

Понятно, что и до сдвига, и после сдвига $R_i \rightarrow R_i^* = (B_i^*, P_i^*)$ равновесие R_1^* имеет меньшее значение биомассы, чем R_0^* .

В соответствии с теорией катастроф равновесие R_1^* при потере устойчивости перейдёт скачком в равновесие R_0^* , а последнее в принципе может вернуться к равновесию R_1^* (пожар, рубка леса), но скорее всего следует ожидать бифуркации Андронова-Хопфа, поскольку именно это отвечает нормальной эволюции леса.

Поэтому скачкообразная смена $R_1^* \rightarrow R_0^*$ стационарного равновесия системы говорит о том, что лес переходит к равновесию, в котором он продуцирует больше биомассы, и при потере устойчивости этот стационарный процесс закончится переходом посредством бифуркации Андронова-Хопфа [3, 4] к циклическим изменениям биомассы и состояния почвы.

Можно проинтерпретировать это, как стационарное существование экосистемы в состоянии R_1^* с малой продукцией биомассы (посадки), затем переход к состоянию R_0^* с большей продукцией биомассы (зрелый лес), и, наконец, экосистема оказывается

в состоянии, когда каким-то образом периодически меняются биомасса и плодородие почвы (пожары + восстановление леса после пожаров или вырубки + восстановление леса после пожаров или вырубок).

Литература

1. Ничипорович А. А., Овчаров К. Е. *КПД зеленого листа, витамины в растениях*. <https://lsdinfo.org/vozdejstvie-lesov-na-pochvu>.
2. Володченко Л. А., Гуц А. К. *Математические модели лесных экосистем с бифуркациями Андронова-Хопфа* // Математические структуры и моделирование. 2021. № 3(59). С. 92–108.
3. Марсен Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и её приложения*. М.: Мир, 1980.
4. Касти Дж. *Большие системы. Связность, сложность и катастрофы*. М.: Мир, 1982.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ПАНДЕМИИ COVID-19 НА БАЗЕ СПЕЦИФИКАЦИИ SIR МОДЕЛИ

А.С. Горулёв, А.В. Капусто

В период с декабря 2019 по март 2022 года по всему миру было зафиксировано 488 млн. случаев заражения коронавирусной инфекцией, 6,14 млн. из которых имели летальный исход (хотя показатель смертности считается заниженным). Самой смертоносной пандемией прошлого века принято считать испанку (испанский грипп), которая в 1918–1922 гг. после Первой мировой войны унесла жизни 50 миллионов человек или 2,73% от всего населения. Число жертв пандемий чумы (541–542 гг., 1347–1351 гг.) было еще более многочисленным. Последствия пандемий сказываются во всех сферах деятельности как отдельного человека, так и стран в целом, — социальной, финансовой, политической и т.д. Поэтому большое значение приобретают не только достижения медицины в области борьбы с инфекциями, но и все результаты в направлении моделирования распространения и развития эпидемий [1].

Наиболее известной моделью развития эпидемий считается SIR модель, в основе которой лежит разделение населения на восприимчивых (S), инфицированных (I) и переболевших (R). Она имеет высокую точность прогноза при большой популяции и легко может быть расширена путем добавления дополнительных параметров [2]. Например, в известную SEIR модель включают E – инкубационный период.

Для повышения точности прогноза в проведенном исследовании в классическую SIR модель было добавлено 3 параметра: H – госпитализированные (не в реанимации или отделении интенсивной терапии), C – госпитализированные (в реанимации или отделении интенсивной терапии) и D – умершие от болезни.

SIHCDR модель описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\theta_I(t) \cdot \frac{S(t)}{N - D(t)} - \mu \cdot S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \theta_I(t) \cdot \frac{S(t)}{N - D(t)} - (\omega_1 + \eta + \mu) \cdot I(t), \\ \frac{dH(t)}{dt} &= \eta I(t) - (\omega_2 + \lambda_1 + \xi + \mu) \cdot H(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \xi H(t) - (\omega_3 + \lambda_2 + \mu) \cdot C(t), \\ \frac{dD(t)}{dt} &= \lambda_1 H(t) + \lambda_2 C(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \omega_1 I(t) + \omega_2 H(t) + \omega_3 C(t) - \mu R(t),\end{aligned}$$