назовем *обобщенным решением задачи (1), (2) или уравнения (5)*, а решение уравнения

$$L^{+}u = g \tag{8}$$

– обобщенным решением задачи (3), (4) или уравнения (6).

Имеют место следующие энергетические неравенства для операторов L и L^{+}.

Теорема 1. *Если выполняются следующие условия:*

1) $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$;

2) если $a_1 = -1$, *то* $b_1 \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$;

3) если $a_1 = 0$, *то* $b_1 \in (-\infty, -\frac{\sqrt{-942 + 266\sqrt{57}}}{96}) \cup (\frac{\sqrt{-942 + 266\sqrt{57}}}{96}, +\infty)$;

4) если $a_1 = 1$, *то* $b_1 \in (-\infty, -1.21) \cup (1.21, +\infty)$,

то для любых u *и* v *из* $H_0^1(\Omega)$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\|Lu\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{9}$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c^{*}\|L^{+}v\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{10}$$

где постоянные $c > 0$ *и* $c^{*} > 0$ *не зависят от функций* u *и* v.

Теорема 2. *При выполнении условий Теоремы 1 для любого элемента* $f \in H_0^1(\Omega)$ *существует единственное обобщенное решение* u *задачи (1)–(2), а для любого элемента* $g \in H_0^1(\Omega)$ *существует единственное обобщенное решение* v *задачи (3)–(4) и справедлива оценка*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant k\|f\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \tag{11}$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant k^{*}\|g\|_{H_0^{-1}(\Omega)}. \tag{12}$$

.

Литература

1. Корзюк В. И. *Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными* / Минск: БГУ, 2013.

2. Корзюк В. И. *Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка* // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2012. № 3. С. 116–121.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г.В. Демиденко

В монографии [1] исследовались краевые задачи для классов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной,

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор. В литературе такие уравнения часто называют *уравнениями соболевского типа*. Большой интерес к таким уравнениям был инициирован исследованиями С. Л. Соболева [2] задачи о малых колебаниях вращающейся жидкости. В настоящее время существует много теоретических и прикладных исследований задач для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. Уравнения вида (1) возникают при моделировании различных процессов [1]. В конце прошлого века с ростом количества статей по этим уравнениям “стала очевидной” некоторая классификации уравнений вида (1). Проанализировав большое число работ, авторы [1] выделили три класса уравнений: уравнения соболевского типа, псевдопараболические уравнения и псевдогиперболические уравнения.

При изучении задачи Коши для псевдогиперболических уравнений (1) с постоянными коэффициентами в работах [1, 3] впервые были получены энергетические оценки и доказаны теоремы о разрешимости в весовых соболевских пространствах. Отметим, что уравнения вида (1), рассмотренные в [1, 3], не содержали младших членов (в обобщенном смысле). Аналогичные результаты для класса уравнений, содержащих младшие члены, получены в работе [4]. Некоторый класс псевдогиперболических уравнений, удовлетворяющих условию изотропности, был рассмотрен в [5].

В настоящей работе мы вводим класс псевдогиперболических систем

$$L(D_x)D_tU + M(D_x)U = F(t,x),$$

где $L(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, и рассматриваем задачу Коши для таких систем. В случае, когда символы операторов $L(D_x)$, $M(D_x)$ квазиоднородны, получены энергетические оценки, установлены условия однозначной разрешимости в весовых соболевских пространствах. Аналогичные результаты получены в случае, когда символы $L(i\xi)$, $M(i\xi)$ не являются квазиоднородными при условии, что $\det L(i\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск: Научная книга, 1998.

2. Соболев С. Л. *Избранные труды.* Т. 1, 2. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал “Гео” Изд-ва СО РАН, 2003, 2006.

3. Demidenko G. V. *On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations* // Siberian Advances in Mathematics. 2001. V. 11. № 4. P. 25-–40.

4. Демиденко Г. В. *Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений* // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.

5. Fedotov I., Volevich L. R. *The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative* // Russian Journal of Mathematical Physics. 2006. V. 13. № 3. P. 278–292.

О НЕЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ УГЛОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

И.В. Денисов, А.И. Денисов

Сингулярно возмущенные системы параболических уравнений вида

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u\right) = f(u,v,x,t,\varepsilon), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u,v,x,t,\varepsilon),$$

где Δ – оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, x_3)$, возникают при математическом описании химических реакций с учетом диффузии. Компоненты вектор-функций u и v являются концентрациями реагирующих веществ, а малый параметр ε – величиной,