ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ i-ГЛАДКОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Ким

i-Гладкий анализ [2, 3] позволяет разрабатывать теорию систем с последействием аналогично теории ОДУ, при этом в случае исключения (исчезновения) запаздывания, получаемые результаты переходят с точностью до обозначений в соответствующие результаты теории ОДУ [2–6].

В докладе на примерах

- Метода функционалов Ляпунова-Красовского,
- Метода динамического программирования для систем с последействием,
- Теории АКОР для систем с последействием,
- Метода типа Рунге-Кутты для систем с "произвольным" последействием

объясняются принципы исследования задач теории ФД на основе методологии i-гладкого анализа [2-4].

Разработанные на основе i-гладкого анализа численные методы решения ФДУ реализованы в форме пакета прикладных программ **Time-Delay System Toolbox** [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00352).

Литература

1. Красовский Н. Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* М.: Физмагиз, 1959.

2. Ким А. В. *i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения.* Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.

3. Kim A. V. *i-Smooth analysis. Theory and Applications.* New Jersey: Wiley, 2015.

4. Kim A. V., Ivanov A. V. *Systems with Delays. Analysis, Control and Simulation.* New Jersey: Wiley, 2015.

5. Kwon W. H., Kim A. V., Kormyshev V. M., Pimenov V. G., Lozhnikov A. B., Solodushkin S. I. *Analytical constructing of regulators for systems with delays.* Ekaterinburg: Ural Federal university press, 2011.

6. Kim A. V., Kwon W. H., PimenovV. G., Han S. H., Lozhnikov A. B., Moon Y. S. *Time-Delay System Toolbox (for use with Matlab).* Seoul National university. School of Electrical Engineering, 1998.

К СТРУКТУРЕ ПО ПРАНДТЛЮ-КАРМАНУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В.Н. Лаптинский

Исследуется система соотношений

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$u_x|_{y=0} = 0, \;\; u_y|_{y=0} = 0; \;\; u_x|_{y=\delta(x)} = U\,(x), \tag{3}$$

представляющая собой задачу Прандтля о динамическом турбулентном пограничном слое конечной толщины $\delta(x)$ в случае плоского несжимаемого течения жидкости, [2, с. 368], при этом для турбулентной составляющей τ_t полного напряжения трения $\tau = \tau_l + \tau_t$ используется формула Прандтля

$$\tau_t = \rho\kappa^2 y^2 \left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right| \frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{4}$$

где $\tau_l = \mu\partial u_x/\partial y$ – ламинарная составляющая. Искомыми величинами являются функции $\delta(x)$ и $\tau_0(x)$ – касательное напряжение; знак осреднения скорости опущен.

В случае ламинарного течения в работе [3] по методу [4] получено точное решение этой задачи. Однако вследствие чрезвычайной сложности картины турбулентного течения и отсутствия рациональных теорий турбулентности решение задачи (1)–(3) в строгой математической постановке в настоящее время невозможно [2, с. 380]. Для расчета турбулентных течений используются различные полуэмпирические теоретические гипотезы, связывающие силы турбулентной вязкости, вызываемые турбулентным перемешиванием, с осредненными во времени скоростями. Только после введения таких гипотез гидродинамические дифференциальные уравнения осредненного движения принимают вид, допускающий их интегрирование [1, с. 520]. Первой была гипотеза Л. Прандтля, основанная на понятии пути перемешивания $l = l(y)$, на основе которого функция $\tau_t = \tau_t(x, y)$ представима в виде

$$\tau_t = \rho l^2(y) \left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right| \frac{\partial u_x}{\partial y};$$

тогда

$$\tau = \mu\frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho l^2(y) \left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right| \frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{5}$$

Присутствие абстрактной функции $l(y)$ делает задачу неопределенной. Однако в непосредственной близости от обтекаемой гладкой поверхности (без шероховатостей), то есть в области ламинарного подслоя $0 \leqslant y < \delta_l$, функция $l(y)$ имеет вид [5, с. 392] $l = \kappa y$, где κ – известная полуэмпирическая постоянная ($\kappa \approx 0,4$); тогда τ_t имеет вид (4), и постановка задачи уточняется, а ее анализ облегчается, при этом знак модуля можно убрать.

В [6–8] предприняты попытки аналитического решения задачи в случае, когда

$$l(y) = \kappa y, \quad 0 \leqslant y \leqslant \delta(x). \tag{6}$$

Это жесткое ограничение, но оно позволяет применить методику [4], дополненную понятием ударной вязкости пограничного слоя. В [6–8] получены определенные соотношения, дающие основу для построения функций $\delta(x)$, $\tau_0(x)$ либо структуру этих функций, описывающую роль физических параметров задачи (1)–(3) в формировании пограничного слоя.

В данной работе на основе формулы Прандтля (5) и преобразованного уравнения Кармана [1, с. 604]

$$\frac{d\delta}{dx} + \left(2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{U'}{U}\delta = \frac{\tau_0}{\alpha_1\rho U^2}, \tag{7}$$

а также соотношения

$$\tau_0 = \frac{1}{c_\tau}\left(\mu\frac{U}{\delta} + \rho\kappa^2\delta^2 c_t\frac{\tau_0^2}{\mu^2}\right),$$

определяемого с помощью величины ударной вязкости пограничного слоя, получено уравнение относительно $\delta(x)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d\delta^2}{dx}+F\frac{U'}{U}\delta^2=\frac{\nu}{\alpha_1 c_\tau U}+\frac{c_t\kappa^2\delta^3}{\alpha_1 c_\tau \mu^2 U^2}\tau_0^2, \tag{8}$$

где

$$\tau_0=\frac{2\mu U}{\delta\left[c_\tau+\sqrt{c_\tau^2-4c_t\kappa^2\delta U/\nu}\right]}; \tag{9}$$

здесь $c_\tau=c_\tau(x)$, $c_t=c_t(x)$ – структурные функции, конструируемые на основе безразмерных интегральных средних $\bar\tau$, $\bar\tau_t$ по $y\in[0,\delta(x)]$ безразмерных напряжений трения соответственно τ, τ_t; величины [1, с. 194]

$$\alpha_1=\int\limits_0^1 f(s)\big(1-f(s)\big)\,ds,\quad \alpha_2=\int\limits_0^1\big(1-f(s)\big)\,ds$$

вычисляются по полуэмпирической функции $f(s)$ автомодельного типа, определяемой по соответствующему профилю скоростей $u_x/U=f(y/\delta)\equiv(y/\delta)^n$ [1, с. 604], [5, с. 394].

Замечание. Подкоренное выражение в (9) является безусловно неотрицательным на основании неравенств $c_l<c_\tau\leqslant 2c_l<2$, где c_l – структурная функция, определяемая на основе $\bar\tau_l$. Все используемые структурные функции изменяются в строгих границах от 0 до 1; они являются постоянными величинами только для профиля скоростей автомодельного типа.

Литература

1. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* М.: Наука, 1974.

2. Емцев Б. Т. *Техническая гидромеханика.* М.: Машиностроение, 1987.

3. Лаптинский В. Н. *Точное решение задачи Прандтля о динамическом ламинарном пограничном слое* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 4. С. 549–552.

4. Лаптинский В. Н. *Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае* // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. XLIV. № 5. С. 72–93.

5. Авдуевский В. С. [и др.]. *Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике.* М.: Машиностроение, 1975.

6. Лаптинский В. Н. *К решению задачи о динамическом турбулентном пограничном слое* // Еругинские чтения – 2019: материалы XIX междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Могилев, 14-17 мая 2019 г. Могилев, 2019. Ч. II. С. 82–84.

7. Лаптинский В. Н. *Решение по Прандтлю задачи о динамическом турбулентном пограничном слое* // Междунар. матем. конф. «Седьмые Богдановские чтения по обыкн. дифференц. уравнениям»: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 1–4 июня 2015 г. Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2021. С. 183–185.

8. Лаптинский В. Н. *Структура по Прандтлю–Карману решения задачи о динамическом турбулентном пограничном слое* // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы I Международной научно-технической конференции. Ижевск, 2021. С. 86–90.