ДВЕ ЗАДАЧИ КАЧЕСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В.М. Овсянников

Л. Эйлер вывел в 1752 г. уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости с учетом слагаемых высокого порядка малости по времени деформации контрольной фигуры [1–3]

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+(t-t_0)^2\,\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=0.$$

Здесь u, v, w – компоненты скоростей вдоль координатных осей x, y, z; $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ и $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ – якобианы поля скорости второго и третьего порядков.

Члены высокого порядка по времени получены Эйлером точным геометрическим расчетом при использовании линейного по времени t закона движения жидкой частицы в форме уравнений Коши-Гельмгольца. Возникает вопрос об использовании членов высокого порядка малости уравнения неразрывности в математической физике.

Дж. Лайтхилл в 1952–1954 гг. методом акустической аналогии показал путь вывода волнового уравнения с использованием взятия производной по времени от уравнения неразрывности. В 2006 г. после учета сжимаемости в уравнении неразрывности Эйлера автором было получено [4, 5] волновое уравнение для малосжимаемой жидкости в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\left(\frac{1}{c_0^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\rho_0\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+(t-t_0)\rho_0^2\,\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}.$$

Здесь c_0 – скорость звука, ρ_0 – термодинамическая плотность.

Эйлер уничтожил в уравнении неразрывности члены высокого порядка малости предельными переходами. Упрощенное уравнение неразрывности дало обоснование для введения оператора дивергенции, который проник во многие разделы математики.

Вывод уравнения неразрывности при использовании других лагранжевых законов движения жидкой частицы дает другие формы членов высокого порядка малости. Поэтому возникает вопрос о качественных решениях волнового уравнения, когда неоднородная часть отлична от нуля и имеет различные зависимости от времени. Полученные приближенные решения [6–8] свидетельствуют об описании генерации звуковых волн, вибраций, автоколебаний дополнительными членами уравнения неразрывности. Но эта проблема, ввиду своей важности и частого описания аварийных ситуаций, нуждается в более точных исследованиях.

Второй задачей является использование выведенной Эйлером более полной формы оператора дивергенции в системе уравнений электродинамики Максвелла 1873 г.

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu\mu_0\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\varepsilon\varepsilon_0\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{J},\quad \operatorname{div}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0,$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, c – скорость света, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, ε и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\mathbf{J}$ – вектор плотности электрического тока.

Использование в докладе [9] дополнительных членов оператора дивергенции в уравнении для напряженности магнитного поля H приводит формально к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{\partial J_y}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{t-t_0}{\tau q} \frac{\partial \left[\frac{\partial(H_x,H_y)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(H_y,H_z)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial(H_z,H_x)}{\partial(z,x)}\right]}{\partial x} - \left(\frac{t-t_0}{\tau q}\right)^2 \frac{\partial \left[\frac{\partial(H_x,H_y,H_x)}{\partial(x,y,z)}\right]}{\partial x},$$

в котором слагаемые не имеют одинаковой размерности. Для выравнивания размерностей суммирующихся членов искусственно введен коэффициент τq, значение которого не известно. Получено волновое уравнение, о котором известно, что присутствующие в нем слагаемые электромагнитной индукции Фарадея могут быть увеличены на некоторую величину. Таким образом возникает дополнительная ЭДС за счет слагаемых высокого порядка малости уравнения неразрывности, вычисленных Эйлером. Для рассмотрения задач самовоспламенения электрических приборов, лесов важно получить даже качественное, а не количественное решение вновь выведенного волнового уравнения.

Литература

1. Euler L. *Principia motus fluidorum. Pars prior* // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae. 1761. T. 6 (1756–1757). P. 271–311. – Opera omnia. S. II. V. 13. P. 1–369.

2. Euleri L. *Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius* / Edidit C.A. Truesdell. Lausannae, 1954.

3. Эйлер Л. *Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН* / Пер. с латинского Е.В. Ивановой и В.М. Овсянникова. 4-е изд., доп. М.: Спутник+, 2020.

4. Овсянников В. М. *Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения* // Итоги науки и техн. Сер. соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 182. С. 95-100.

5. Ovsyannikov V. M. *Euler's Equation of Continuity: Additional Terms of High Order of Smallness – An Overview* // Fluids. 2021. V. 6(162).

6. Овсянников В. М. // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 2. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019.

7. Овсянников В. М. // ЖВМ и МФ. 2017. № 5. С. 876–880.

8. Овсянников В. М. // Сб. докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 20-24 августа 2015 г. Казань. С. 2823–2824.

9. Овсянников В. М. *Волны напряженности магнитного поля, генерируемые членами высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера* // Сб. материалов 12-ой междунар. конф.-школы мол. ученых «Волны и вихри в сложных средах». 1-3 декабря 2021 г. Москва. М.: ООО "ИСПОпринт", 2021. С. 175–178.

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЭЙЛЕРА С ЧЛЕНАМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ. ОБЗОР

В.М. Овсянников

Уравнение неразрывности Эйлера дает понятие оператора дивергенции и является основным соотношением во многих физико-математических науках. В последние десятилетия обнаружилась в трудах Л. Эйлера и Н. Е. Жуковского более полная его