Использование в докладе [9] дополнительных членов оператора дивергенции в уравнении для напряженности магнитного поля H приводит формально к волновому уравнению
$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{\partial J_y}{\partial z}-\frac{\partial J_z}{\partial y}-\frac{t-t_0}{\tau q}\,\frac{\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(H_y,H_z)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(H_z,H_x)}{\partial(z,x)}\right]}{\partial x}-\left(\frac{t-t_0}{\tau q}\right)^2\frac{\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y,H_x)}{\partial(x,y,z)}\right]}{\partial x},$$
в котором слагаемые не имеют одинаковой размерности. Для выравнивания размерностей суммирующихся членов искусственно введен коэффициент τq, значение которого не известно. Получено волновое уравнение, о котором известно, что присутствующие в нем слагаемые электромагнитной индукции Фарадея могут быть увеличены на некоторую величину. Таким образом возникает дополнительная ЭДС за счет слагаемых высокого порядка малости уравнения неразрывности, вычисленных Эйлером. Для рассмотрения задач самовоспламенения электрических приборов, лесов важно получить даже качественное, а не количественное решение вновь выведенного волнового уравнения.

Литература

1. Euler L. *Principia motus fluidorum. Pars prior* // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae. 1761. T. 6 (1756–1757). P. 271–311. – Opera omnia. S. II. V. 13. P. 1–369.

2. Euleri L. *Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius* / Edidit C.A. Truesdell. Lausannae, 1954.

3. Эйлер Л. *Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН* / Пер. с латинского Е.В. Ивановой и В.М. Овсянникова. 4-е изд., доп. М.: Спутник+, 2020.

4. Овсянников В.М. *Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения* // Итоги науки и техн. Сер. соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 182. С. 95-100.

5. Ovsyannikov V.M. *Euler's Equation of Continuity: Additional Terms of High Order of Smallness – An Overview* // Fluids. 2021. V. 6(162).

6. Овсянников В.М. // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 2. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019.

7. Овсянников В.М. // ЖВМ и МФ. 2017. № 5. С. 876–880.

8. Овсянников В.М. // Сб. докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 20-24 августа 2015 г. Казань. С. 2823–2824.

9. Овсянников В.М. *Волны напряженности магнитного поля, генерируемые членами высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера* // Сб. материалов 12-ой междунар. конф.-школы мол. ученых «Волны и вихри в сложных средах». 1-3 декабря 2021 г. Москва. М.: ООО "ИСПОпринт", 2021. С. 175–178.

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЭЙЛЕРА С ЧЛЕНАМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ. ОБЗОР

В.М. Овсянников

Уравнение неразрывности Эйлера дает понятие оператора дивергенции и является основным соотношением во многих физико-математических науках. В последние десятилетия обнаружилась в трудах Л. Эйлера и Н.Е. Жуковского более полная его форма. Дополнительные слагаемые высокого порядка малости описывают, как правило, аварийные процессы. Поэтому их изучение и учет весьма актуальны.

В.А. Бубнов в 1997 г, изучая магистерскую диссертацию Н.Е. Жуковского с выводом уравнения неразрывности, нашел вычисленные для него члены второго порядка малости. Позже обнаружилось, что на промежуточных этапах вывод Эйлера 1752 г. уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости, содержит, кроме дивергенции поля скорости, большое количество слагаемых второго и третьего порядков малости по времени t деформации контрольной фигуры [1, 2]. К. Трусделл, делая в 1954 г. краткий перевод латинского текста Эйлера на английский язык [3], эти дополнительные слагаемые объединил в три якобиана второго порядка и в один якобиан третьего порядка.

Уравнение неразрывности Эйлера для несжимаемой жидкости получило вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+(t-t_0)^2\,\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=0. \quad (1)$$

Здесь u, v, w – компоненты скоростей вдоль координатных осей x, y, z; $t-t_0$ – длина интервала времени деформации контрольной фигуры; $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ и $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ – якобианы поля скорости второго и третьего порядков, соответственно.

В последующем тексте Эйлер, идя по пути упрощения результатов, уничтожил члены высокого порядка малости предельными переходами с устремлением интервала времени деформации контрольной фигуры Δt к нулю. Так как все промежуточные результаты сохраняют физический смысл, заложенный в них исходными положениями вывода, то мы обязаны изучить и понять физический смысл членов второго и третьего порядков малости. В процессе этого изучения было понято, что они вызывают образование волн давления и волн плотности в сжимаемой среде. В 2006 г. автором уравнение (1) было записано для сжимаемой среды, и с его помощью выведены волновые уравнения, имеющие второй и третий порядок дифференцируемости по времени. Члены высокого порядка малости, вычисленные Эйлером, после взятия производных по времени, стали иметь более низкий порядок малости. Их учет показал возможность решения ряда инженерных задач, связанных с образованием волн плотности и давления [4], [5]. Оказалось также, что в методе квазилинеаризации Т.Г. Елизарова и ее ученики с успехом используют комплексы с якобианами второго порядка для регулирования скорости сходимости итераций численных решений.

Возникает вопрос: в каком месте другого вывода уравнения неразрывности, сделанного М.В. Остроградским в 1828-1831 гг., теряются аналогичные члены второго и третьего порядка малости по времени? Вывод Остроградского основан на балансе потоков вещества, вошедшего в контрольную фигуру и вышедшего из нее за некоторый малый, но конечный интервал времени Δt. Перейдем в выводе Остроградского от использования интегрального понятия потоков к кинематическому анализу перемещений отдельных жидких частиц за интервал времени Δt и проведем расчет поля скорости для условий конкретной задачи течения несжимаемой жидкости внутри прямого угла. Теория функций комплексного переменного при использовании комплексного потенциала $w=z^2$ дает поле скорости, в котором все частицы, двигаясь по гиперболам, при постоянном значении y имеют одинаковую скорость u в направлении оси x. При постоянном значении x все частицы имеют одинаковую скорость v вдоль оси y. Если выбрать в качестве контрольной фигуры квадрат, один из углов которого расположен в точке начала координат, и проанализировать пути перемещения по гиперболическим траекториям жидких частиц, то получается неожиданный вывод, что за интервал времени Δt в фигуру войдет меньше частиц, чем ее покинет. Это является следствием выпуклости формы контрольной фигуры. Такой же дисбаланс и описывается членами высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера. Этот же механизм можно пояснить так.

М. В. Остроградский, составляя баланс жидких частиц, вошедших в контрольную фигуру и покинувших ее, не учел третьей возможной ситуации - прохода частицей за время Δt контрольной фигуры по секущей и выхода за пределы фигуры. Это свойство только выпуклых фигур. Числовой расчет количества жидких частиц подтверждает на примере течения внутри прямого угла одинаковость числа частиц, дважды пересекших границу, и вычисленных по членам высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера (1). В уравнении Гаусса-Остроградского, записанном через интегральные суммы вместо интегралов, появляются дополнительные члены, зависящие от величины интервала времени Δt. При переходе к интегралам дополнительные члены зануляются предельными переходами устремления к нулю Δx, Δy, Δz, Δt. Уравнение неразрывности для жидкости явилось моделью введения в математику оператора div. Поэтому его слагаемые второго и третьего порядка малости могут проявляться и в других дисциплинах [6].

Литература

1 .Euler L. *Principia motus fluidorum. Pars prior* // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae. 1761. T. 6 (1756–1757). P. 271–311. – Opera omnia. S. II. V. 13. P. 1–369.

2. Эйлер Л. *Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН* / Пер. с латинского Е.В. Ивановой и В.М. Овсянникова. 4-е изд., доп. М.: Спутник+, 2020.

3. Euleri L. *Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius* / Edidit C.A. Truesdell. Lausannae, 1954.

4. Овсянников В. М. *Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения* // Итоги науки и техн. Сер. соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 182. С. 95-100.

5. Ovsyannikov V. M. *Euler's Equation of Continuity: Additional Terms of High Order of Smallness – An Overview* // Fluids. 2021. V. 6(162).

6. Овсянников В. М. *Волны напряженности магнитного поля, генерируемые членами высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера* // Сб. материалов 12-ой междунар. конф.-школы мол. ученых «Волны и вихри в сложных средах». 1-3 декабря 2021 г. Москва. М.: ООО "ИСПОпринт", 2021. С. 175–178.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЖИМОВ ФУЛЛЕРА

Н.С. Павленок

Исследуется линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой критерий качества не содержит членов с управляющими воздействиями, и на последние накладываются геометрические ограничения. Решения такого класса задач часто содержат (кроме релейных) особые участки [1] и участки с режимом Фуллера [2]. В докладе предлагается численный метод построения программных и позиционных решений таких задач.