вывод, что за интервал времени Δt в фигуру войдет меньше частиц, чем ее покинет. Это является следствием выпуклости формы контрольной фигуры. Такой же дисбаланс и описывается членами высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера. Этот же механизм можно пояснить так.

М. В. Остроградский, составляя баланс жидких частиц, вошедших в контрольную фигуру и покинувших ее, не учел третьей возможной ситуации - прохода частицей за время Δt контрольной фигуры по секущей и выхода за пределы фигуры. Это свойство только выпуклых фигур. Числовой расчет количества жидких частиц подтверждает на примере течения внутри прямого угла одинаковость числа частиц, дважды пересекших границу, и вычисленных по членам высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера (1). В уравнении Гаусса-Остроградского, записанном через интегральные суммы вместо интегралов, появляются дополнительные члены, зависящие от величины интервала времени Δt. При переходе к интегралам дополнительные члены зануляются предельными переходами устремления к нулю Δx, Δy, Δz, Δt. Уравнение неразрывности для жидкости явилось моделью введения в математику оператора div. Поэтому его слагаемые второго и третьего порядка малости могут проявляться и в других дисциплинах [6].

Литература

1 .Euler L. *Principia motus fluidorum. Pars prior* // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae. 1761. T. 6 (1756–1757). P. 271–311. – Opera omnia. S. II. V. 13. P. 1–369.

2. Эйлер Л. *Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН* / Пер. с латинского Е.В. Ивановой и В.М. Овсянникова. 4-е изд., доп. М.: Спутник+, 2020.

3. Euleri L. *Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius* / Edidit C.A. Truesdell. Lausannae, 1954.

4. Овсянников В. М. *Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения* // Итоги науки и техн. Сер. соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 182. С. 95-100.

5. Ovsyannikov V. M. *Euler's Equation of Continuity: Additional Terms of High Order of Smallness – An Overview* // Fluids. 2021. V. 6(162).

6. Овсянников В. М. *Волны напряженности магнитного поля, генерируемые членами высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера* // Сб. материалов 12-ой междунар. конф.-школы мол. ученых «Волны и вихри в сложных средах». 1-3 декабря 2021 г. Москва. М.: ООО "ИСПОпринт", 2021. С. 175–178.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЖИМОВ ФУЛЛЕРА

Н.С. Павленок

Исследуется линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой критерий качества не содержит членов с управляющими воздействиями, и на последние накладываются геометрические ограничения. Решения такого класса задач часто содержат (кроме релейных) особые участки [1] и участки с режимом Фуллера [2]. В докладе предлагается численный метод построения программных и позиционных решений таких задач.

Рассматривается линейная стационарная система управления с одним входом и со свободным терминальным состоянием. Поведение системы оптимизируется по выпуклому квадратичному функционалу, определенному на траекториях системы

$$\int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{k} d_i x_i^2(t)\,dt \to \min, \quad \dot{x} = Ax + bu, \ x(0) = x_0, \quad |u(t)| \leqslant L, \quad t \in T = [0, t_f], \quad (1)$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы управления в момент t; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданное начальное состояние системы управления; $u = u(t) \in \mathbb{R}$ – значение скалярного управляющего воздействия; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$; $d_i \in \mathbb{R}$, $d_i > 0$, $i = \overline{1,k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$; $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$.

Функцию $u(t)$, $t \in T$, назовем

- *дискретной* (с периодом квантования h, $h = t_f/N$, $N \in \mathbb{N}$), если $u(t) = u(\tau)$, $t \in [\tau, \ \tau + h[$, $\tau \in T_h = \{0, h, ..., t_f - h\}$;
- *дискретно-особой*, если она дискретна на неособых участках и непрерывна на особых [1], при этом границами особых участков являются моменты $\tau \in T_h$.

Дискретно-особое управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T$, назовем *программой*, если оно удовлетворяет ограничениям: $|u(t)| \leqslant L$, $t \in T$. Программа $u^0(t)$, $t \in T$, *оптимальна*, если на соответствующей ей (оптимальной) траектории $x^0(t)$, $t \in T$, критерий качества достигает минимального значения.

В классе измеримых управляющих воздействий решение задачи (1) может содержать, кроме релейно-особых, участки с режимами Фуллера [2], на которых происходят бесконечно частые переключения управляющих воздействий. Поэтому, следуя работе [3], каждый режим Фуллера заменяется на дискретно-особое управляющее воздействие, которое по значению критерия качества (при соответствующем выборе параметров метода) сколь угодно мало отличается от оптимального управляющего воздействия с режимом Фуллера. Для этого исходная линейно-квадратичная задача оптимального управления аппроксимируется кусочно-линейной, которая в свою очередь решается методом последовательных линеаризаций.

В зависимости от результата решения кусочно-линейной задачи строится оптимальное релейное управляющее воздействие или производится врезка особого участка. Предлагается специальный тест на наличие режима Фуллера. При его отсутствии строится оптимальное релейно-особое управляющее воздействие.

На базе результатов по программным решениям, позволяющим выявить потенциальные возможности системы управления, строится метод оптимального управления в реальном времени [4]. Для определения оптимальной обратной связи исходная задача (1) погружается в семейство задач

$$\int_\tau^{t_f} \sum_{i=1}^{k} d_i x_i^2(t)dt \to \min, \quad \dot{x} = Ax + bu, \ x(\tau) = z, \quad |u(t)| \leqslant L, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t_f], \quad (2)$$

зависящее от момента времени $\tau \in T_h$ и n-вектора z. Пусть $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T(\tau)$, – оптимальная программа задачи (2) для позиции (τ, z). Функцию

$$u^0(\tau, z) = (u^0(t|\tau, z), \ t \in [\tau, \tau + h[), \ \ \tau \in T_h, \ \ z \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

назовем *оптимальной дискретно-особой обратной связью* (*позиционным решением* задачи (1)), построение функции (3) — *синтезом оптимальной системы* по принципу замкнутого контура. Вводится понятие *реализации* оптимальной обратной связи

$$u^*(t) = u^0(t, x^*(t)) = u^0(t|\tau, x^*(\tau)), \;\; t \in [\tau, \tau + h[, \;\; \tau \in T_h, \tag{4}$$

ориентированное на вычисление текущих значений оптимальной обратной связи в реальном времени по ходу каждого конкретного процесса управления. Согласно (4), для управления конкретным процессом не нужно знать оптимальную обратную связь (3) целиком, во всей области ее определения, нужны лишь ее значения вдоль изолированной траектории $x^*(t),\; t \in T$. В докладе функция (4) строится по принципу оптимального управления в реальном времени, при котором оптимальная обратная связь (3) не строится целиком. Вместо этого по ходу процесса управления для каждого текущего периода времени $[\tau, \tau + h]$ вычисляются необходимые значения ее реализации $u^*(t)$ за время, не превосходящее периода квантования h.

Все теоретические результаты иллюстрируются на численных примерах, частично рассмотренных в [2, 5].

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Особые оптимальные управления.* М.: Наука, 1973.

2. Фуллер А. Т. *Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества* // Труды I Междунар. конгресса IFAC, 1961. С. 584–605.

3. Gabasov R., Kirillova F. M., Pavlenok N. S. *Constructing open-loop and closed-loop solutions of linear-quadratic optimal control problems* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. № 48(10). P. 1715–1745.

4. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Павленок Н. С. *Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний* // Доклады РАН. № 444(4). С. 371-375.

5. Брайсон А., Ю-Ши Хо *Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление.* М.: Мир, 1972.

МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНВАЗИВНЫХ ПРОЦЕССОВ ПОПУЛЯЦИЙ

А.Ю. Переварюха

Инвазионные процессы популяций в новой среде могут происходить с периодическими импульсными вспышками. Начальный импульс может затухнуть после первого пика, либо развиться серия нерегулярных вспышек. Наиболее агрессивными являются процессы стремительного распространения видов в новые ареалы. Вселения сопровождаются резкими изменениями численности с дефолиацией леса. С точки зрения теории бифуркаций мы имеем дело с принципиально разными сценариями экодинамики, которые не описываются системой уравнений «хищник-жертва» [1].

Важна сущностная трактовка возникновения τ запаздывания $t-\tau$ или обобщенно $t-\psi(t)$. Величина времени τ изначально относилась к регуляции эффективности воспроизводства через задержку онтогенетического развития. Изменение запаздывания по некоторому закону $\tau = \psi(t)$ может возникать при существовании смежных поколений с разной длительностью онтогенеза, когда одно из поколений проходит зимовку, что является специфическим случаем. Длина жизненного цикла вида и интервалы между пиками численности у его популяций не всегда сопоставимые величины на шкале времени. Мы предлагаем разделять запаздывание при интерпретации моделей на репродуктивное (онтогенетическое), регуляционное из-за исчерпания ресурсов и адаптивное — время для выработки ответной реакции.