

замкнутого контура. Вводится понятие *реализации* оптимальной обратной связи

$$u^*(t) = u^0(t, x^*(t)) = u^0(t|\tau, x^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + h], \quad \tau \in T_h, \quad (4)$$

ориентированное на вычисление текущих значений оптимальной обратной связи в реальном времени по ходу каждого конкретного процесса управления. Согласно (4), для управления конкретным процессом не нужно знать оптимальную обратную связь (3) целиком, во всей области ее определения, нужны лишь ее значения вдоль изолированной траектории $x^*(t)$, $t \in T$. В докладе функция (4) строится по принципу оптимального управления в реальном времени, при котором оптимальная обратная связь (3) не строится целиком. Вместо этого по ходу процесса управления для каждого текущего периода времени $[\tau, \tau + h]$ вычисляются необходимые значения ее реализации $u^*(t)$ за время, не превосходящее периода квантования h .

Все теоретические результаты иллюстрируются на численных примерах, частично рассмотренных в [2, 5].

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Особые оптимальные управления*. М.: Наука, 1973.
2. Фуллер А. Т. *Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества* // Труды I Междунар. конгресса IFAC, 1961. С. 584–605.
3. Gabasov R., Kirillova F. M., Pavlenok N. S. *Constructing open-loop and closed-loop solutions of linear-quadratic optimal control problems* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. № 48(10). P. 1715–1745.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Павленок Н. С. *Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний* // Доклады РАН. № 444(4). С. 371–375.
5. Брайсон А., Ю-Ши Хо *Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление*. М.: Мир, 1972.

МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНВАЗИВНЫХ ПРОЦЕССОВ ПОПУЛЯЦИЙ

А.Ю. Переварюха

Инвазионные процессы популяций в новой среде могут происходить с периодическими импульсными вспышками. Начальный импульс может затухнуть после первого пика, либо развиться серия нерегулярных вспышек. Наиболее агрессивными являются процессы стремительного распространения видов в новые ареалы. Вселения сопровождаются резкими изменениями численности с дефолиацией леса. С точки зрения теории бифуркаций мы имеем дело с принципиально разными сценариями экодинамики, которые не описываются системой уравнений «хищник-жертва» [1].

Важна сущностная трактовка возникновения τ запаздывания $t - \tau$ или обобщенно $t - \psi(t)$. Величина времени τ изначально относилась к регуляции эффективности воспроизводства через задержку онтогенетического развития. Изменение запаздывания по некоторому закону $\tau = \psi(t)$ может возникать при существовании смежных поколений с разной длительностью онтогенеза, когда одно из поколений проходит зимовку, что является специфическим случаем. Длина жизненного цикла вида и интервалы между пиками численности у его популяций не всегда сопоставимые величины на шкале времени. Мы предлагаем разделять запаздывание при интерпретации моделей на репродуктивное (онтогенетическое), регуляционное из-за исчерпания ресурсов и адаптивное — время для выработки ответной реакции.

Для модели экстремальных популяционных процессов актуальна минимальная численность той группы, которая теоретически необходима для выживания локальной популяции. Д. Базикиным предложено уравнение с квадратичным фактором внешнего сопротивления $-\delta N^2$ для описания сценария исчезновения популяции при пороговом эффекте

$$\frac{dN}{dt} = r \frac{\gamma N^2}{\gamma + \sigma N} - \varsigma N - \delta N^2. \quad (1)$$

Принцип «агрегированной группы» говорит о том, что для популяции есть оптимальный для воспроизводства диапазон численности сообщества $\bar{\Delta}N$. Этот термин применим к общественным животным. Критический минимальный L -порог $L < \inf \bar{\Delta}N$ из этого эффекта напрямую не следует, более того, L -порог плохо совместим с жесткой функцией регуляции $rf(N^k)$, $k \geq 2$, в моделях. Многомиллионные колонии социальных насекомых не страдают от высокой плотности. Минимально необходимое количество рабочих насекомых действительно установлено для выживания пчелиных семей.

Подобные резкие изменения представляют проблему для математического моделирования и составляют большую группу переходных процессов существования экосистем, которые переходят в устойчивые режимы. Нами разработаны сценарии для особых случаев популяционной динамики и взаимодействия противоборствующих организмов на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием $t - \tau$. Нами выбраны модификации известных уравнений для описания особой колебательной активности после обычной бифуркации Андронова-Хопфа в (1) после увеличения репродуктивного параметра R , но с последующим разрушением образовавшегося цикла

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau_1)}{\mathfrak{K}} \right) (\mathfrak{U} - N(t - \tau_2)), \quad (2)$$

где параметр \mathfrak{U} – величина, для которой выполняется неравенство $\mathfrak{U} < \mathfrak{K} \times 0.75$, и которую мы назвали *предкритической емкостью популяции вида-вселенца*. Значение численности \mathfrak{U} играет роль «спускового крючка» для ряда необратимых деструктивных процессов при инвазии и мешает эффективному биотическому противодействию. Важно, что при большом диапазоне значений $R\tau_1$ система не имеет обычного балансового равновесия-точки $N(t) \rightarrow K$ и не имеет неустойчивого равновесия, вокруг которого происходят орбитально устойчивые колебания $N_*(t; R\tau_1\tau_2)$. Объем «Экологической ниши» в такой небалансируемой ситуации просто не существует. Поэтому мы заменили в (1) традиционное обозначение величины ниши K на \mathfrak{K} , так как по своему смыслу эти величины иные, чем в известной «колебательной» модели Хатчинсона для популяции насекомых, изолированных от внешнего действия в лабораторных условиях

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right). \quad (3)$$

Модель с запаздыванием в экологии традиционно исследуют с константой функцией-предысторией. K -емкость традиционно усредненный равновесный уровень. Квадратичный закон регуляции в (2) исключительно умозрительное предположение. Минимумы колебаний в (2) так быстро становятся глубокими и околонулевыми

$$\min N_*(t; R\tau) \rightarrow 0, \quad R < M < \infty,$$

что пользоваться моделью Хатчинсона в реальности невозможно. Популяция для существования должна всегда поддерживать минимально допустимую численность

$N(t) > \mathfrak{L}$. Для описания начала осциллирующей вспышки можно использовать \mathfrak{B} как порог активного сопротивления

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left(\frac{\mathfrak{B} - N^2(t - \tau_1)}{(\mathfrak{B} + lN^3(t - \tau))} \right), \quad (4)$$

где \mathfrak{B} – нижний порог запуска серии пиков численности. Величина емкости ниши K – это инфимум для множества значений \mathfrak{B} . Полученная серия пиков в (3) без нереального свойства $\min N_*(R\tau, t) \rightarrow 0 + \varepsilon$ и с наибольшим

$$\max N_*(R\tau, t_{m1}) > \max N_*(R\tau, t_{m1} + t_p)$$

в самом начале вспышки описывает ряд ситуаций периодических нашествий насекомых, как начало пилообразной вспышки кольчатого шелкопряда в лесах Востока Канады. Для описания противодействия и затухания экстремального процесса предлагаем включить в модель (3) фактор сопротивления биотического окружения или выброса клеток иммунной системой на появление вируса, который будет зависеть и от начальной численности вселенца $N(0)$

$$\frac{dN}{dt} = RN(t) \left(\frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{N}^2(t - \tau_1)}{(\mathfrak{B} + \mathfrak{E}\mathfrak{N}^3(t - \tau))} \right) - \gamma \frac{N^m(t)}{H + N^2(0)}, \quad 2 < m < 3, \quad (5)$$

где γ – параметр эффективности биотического противодействия виду-вселенцу, что не сразу проявляется со стороны автохтонного окружения.

Предложенное уравнение можно использовать в составе «вольтерровских» систем для описания трофического взаимодействия с пороговыми эффектами. Предложенную функцию воздействия $F(N^m(t - \nu); J)$ можно включать в модель пилообразных колебаний вспышек вредителей для описания их демпфирования в случае существования ограниченного лесного ресурса и противодействия естественных врагов-паразитов.

Существуют интересные примеры кризисной динамики и вне области популяционных наблюдений. Так, в онкологии оставшиеся после подавления иммунотерапией опухолевые клетки могут вдруг снова переходить к стремительному делению, но эти сценарии являются темой отдельного исследования. Рассмотренный сценарий отличается от ситуации прохождения у вновь образующейся популяцией стадии длительного минимума при стабильной малочисленной группе особей с относительно малым r . Длительное состояние минимальной реликтовой группы принципиально отлично по эволюционным аспектам от перехода к резкому кризису с восстановлением. Увеличение численности $N(t) \rightarrow K$ в сценариях с длительным минимумом $N(t) \approx L$ связано с нарастанием репродуктивного потенциала, где $r \neq \text{const}$.

Литература

1. Переварюха А. Ю. *Запаздывание в регуляции популяционной динамики – модель клеточного автомата* // Динамические системы. 2017. Т. 7. № 2. С. 157–165.

КРИТЕРИИ УЧЕТА НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА В МНОГОФАКТОРНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

А.Ф. Проневич, Г.А. Хацкевич

Рассмотрим динамическую многофакторную производственную функцию (ПФ)

$$y = f(x, t) \quad \forall (x, t) \in D, \quad (1)$$