$N(t) > \mathfrak{L}$. Для описания начала осциллирующей вспышки можно использовать $\mathfrak{B}$ как порог активного сопротивления

$$\frac{dN}{dt} = RN(t)\left(\frac{\mathfrak{B} - N^2(t-\tau_1)}{(\mathfrak{B} + lN^3(t-\tau))}\right), \tag{4}$$

где $\mathfrak{B}$ – нижний порог запуска серии пиков численности. Величина емкости ниши K – это инфинум для множества значений $\mathfrak{B}$. Полученная серия пиков в (3) без нереального свойства $\min N_*(R\tau, t) \to 0 + \varepsilon$ и с наибольшим

$$\max N_*(R\tau, t_{m1}) > \max N_*(R\tau, t_{m1} + t_p)$$

в самом начале вспышки описывает ряд ситуаций периодических нашествий насекомых, как начало пилообразной вспышки кольчатого шелкопряда в лесах Востока Канады. Для описания противодействия и затухания экстремального процесса предлагаем включить в модель (3) фактор сопротивления биотического окружения или выброса клеток иммуной системой на появление вируса, который будет зависеть и от начальной численности вселенца $N(0)$

$$\frac{dN}{dt} = RN(t)\left(\frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{N}^2(\mathfrak{t}-\tau_1)}{(\mathfrak{B} + \mathfrak{E}\mathfrak{N}^3(\mathfrak{t}-\tau))}\right) - \gamma\frac{N^m(t)}{H + N^2(0)}, \quad 2 < m < 3, \tag{5}$$

где γ – параметр эффективности биотического противодействия виду-вселенцу, что не сразу проявляется со стороны автохтонного окружения.

Предложенное уравнение можно использовать в составе «вольтерровских» систем для описания трофического взаимодействия с пороговыми эффектами. Предложенную функцию воздействия $F\big(N^m(t-\nu); J\big)$ можно включать в модель пилообразных колебаний вспышек вредителей для описания их демпфирования в случае существования ограниченного лесного ресурса и противодействия естественных врагов-паразитов.

Существуют интересные примеры кризисной динамики и вне области популяционных наблюдений. Так, в онкологии оставшиеся после подавления иммунотерапией опухолевые клетки могут вдруг снова переходить к стремительному делению, но эти сценарии являются темой отдельного исследования. Рассмотренный сценарий отличается от ситуации прохождения у вновь образующейся популяцией стадии длительного минимума при стабильной малочисленной группе особей с относительно малым r. Длительное состояние минимальной реликтовой группы принципиально отлично по эволюционным аспектам от перехода к резкому кризису с восстановлением. Увеличение численности $N(t) \to K$ в сценариях с длительным минимумом $N(t) \approx L$ связано с нарастанием репродуктивного потенциала, где $r \neq \text{const}$.

Литература

1. Переварюха А. Ю. *Запаздывание в регуляции популяционной динамики – модель клеточного автомата* // Динамические системы. 2017. Т. 7. № 2. С. 157–165.

КРИТЕРИИ УЧЕТА НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА В МНОГОФАКТОРНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

А.Ф. Проневич, Г.А. Хацкевич

Рассмотрим динамическую многофакторную производственную функцию (ПФ)

$$y = f(x, t) \quad \forall (x, t) \in D, \tag{1}$$

где y – выпуск продукции, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ есть вектор затрат производственных ресурсов, t – параметр времени из числового луча $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbb{R}_+$, экономическая область G из неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$.

В данной работе получены аналитические критерии того, что динамическая многофакторная ПФ (1) учитывает автономный экзогенный НТП [10, с. 83–85; 2; 3]. Способ доказательства основан на нахождении решений линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных. Так, например, критерий учета в ПФ (1) сберегающего по каждому фактору производства НТП, т.е. того, что ПФ (1) представима в аналитическом виде

$$f(x,t) = \widetilde{f}\big(A_1(t)\,x_1, \ldots, A_n(t)\,x_n\big), \tag{2}$$

где строго возрастающие функции A_i, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $A_1(0) = \ldots = A_n(0) = 1$, представляют собой индексы НТП по факторам производства, а многофакторная функция $\widetilde{f}$ является дважды непрерывно дифференцируемой на области G, описывает

Теорема 1. *Динамическая многофакторная ПФ (1) учитывает автономный экзогенный НТП в форме (2) тогда и только тогда, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по факторам производства, т.е. имеет место тождество*

$$\partial_t \ln f(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\varepsilon_{x_i}(f) \quad \forall (x,t) \in G' \times T' \subset G \times T,$$

где α_i есть некоторая скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t, а $\varepsilon_{x_i}(f) = \dfrac{x_i}{f(x,t)}\,\partial_{x_i} f(x,t)$ есть эластичность выпуска продукции по фактору x_i, $i = 1, \ldots, n$.

В случае, когда индексы НТП по факторам производства равны, т.е.

$$A_1(t) \equiv \ldots \equiv A_n(t),$$

из теоремы 1 получаем следующее

Следствие 1. *ПФ (1) учитывает автономный экзогенный НТП в форме (2) с равными индексами НТП по факторам производства, если и только если верно тождество*

$$\frac{\partial_t f(x,t)}{x_1\,\partial_{x_1} f(x,t) + x_2\,\partial_{x_2} f(x,t) + \ldots + x_n\,\partial_{x_n} f(x,t)} = \alpha(t) \quad \forall (x,t) \in G' \times T',$$

где α есть некоторая скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Работа выполнена при поддержке ГПНИ «*Общество и гуманитарная безопасность белорусского государства*» на 2021 – 2025 годы (НИР «*Разработка и применение эконометрических моделей развития малого и среднего предпринимательства в регионах для анализа и прогнозирования производства и экспорта товаров и услуг*, No. ГР 20211753»).

Литература

1. Иванилов Ю. П., Лотов А. В. *Математические модели в экономике.* М.: Наука, 1979.

2. Проневич А. Ф. *Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу* // Вестник института экономики НАН Беларуси. 2021. В. 2. С. 105–120.

3. Проневич А. Ф. *Трудодобавляющий научно-технический прогресс и нейтральность по Харроду* // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2021. В. 15. С. 236–246.

МЕТОД ГАУССОВА ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Т.В. Русилко, Д.А. Сальников

Сеть массового обслуживания (СеМО) – совокупность конечного числа взаимосвязанных систем или узлов массового обслуживания (СМО), в которой циркулируют заявки, переходящие в соответствии с маршрутной матрицей с выхода одной СМО на вход другой. Каждая отдельная СМО является функционально самостоятельной частью сети. Состояние сети в некоторый момент описывается совокупностью n случайных функций $\xi_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, т. е. случайным вектором

$$\xi(t)=\big(\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_n(t)\big)=\left(\frac{K_1(t)}{K},\frac{K_2(t)}{K},...,\frac{K_n(t)}{K}\right)$$

в n-мерном пространстве. Здесь $K_k(t)$ – это число заявок в k-й СМО в момент t, $t\in T$, K – общее число заявок в замкнутой сети.

Случайные процессы, описывающие состояние СеМО, являются многомерными, и их исследование является сложным. Хорошо разработана методика их исследования в стационарном режиме. Данная работа посвящена асимптотическому анализу при $K\to\infty$ экспоненциальных СеМО в переходном режиме [1]. Сеть называется *экспоненциальной*, если входные потоки пуассоновские, время обслуживания заявок в узлах распределено по экспоненциальному закону, заявки в узлах обслуживаются в порядке поступления, переходы заявок между СМО являются независимыми случайными событиями. Состояние экспоненциальной сети в асимптотическом случае большого числа заявок в ней описывается непрерывным марковским случайным процессом $\xi(t)=\big(\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_n(t)\big)$ и в ряде случаев удается доказать, что плотность распределения этого вектора при $K\to\infty$ удовлетворяет прямому уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова, принадлежащему к дифференциальным уравнениям параболического типа [2, 3]:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\big(A_k(x,t)p(x,t)\big)+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\big(B_{kj}(x,t)p(x,t)\big),\qquad(1)$$

где $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, в общем случае $x\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon=K^{-1}$;

$$A(x,t)=\big(A_1(x,t),A_2(x,t),...,A_n(x,t)\big)$$

– векторная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения значений исходного случайного процесса:

$$A_k(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}M\big(\xi_k(t+\Delta t)-\xi_k(t)\big);$$